

# Floquet系での カイラル量子異常と粒子生成

田屋英俊 (理研iTHEMS)

## 目次

### 1. Introduction

- ・カイラルアノマリーの復習
- ・粒子生成の物理

### 2. 1+1次元のMassless Weyl 粒子のアノマリーのFloquet解析

### 3. 1+1次元のMassive Dirac 粒子のアノマリーのFloquet解析

### 4. まとめ

# 1. Introduction

2. 1+1次元のMassless Weyl 粒子  
のアノマリーのFloquet解析

3. 1+1次元のMassive Dirac 粒子  
のアノマリーのFloquet解析

4. まとめ

# カイラル量子異常

✓ 古典的な対称性は、量子効果で壊れ得る

✓ 有名な例: カイラルアノマリー

- massless極限でも、右/左巻きの粒子数(の差)が保存しない

$$\partial_t n_5 := \partial_t (n_R - n_L) \neq 0$$

- より正確には、1+1次元Dirac粒子なら (3+1次元なら磁場を入れ、Landau量子化で次元を落とす:  $\frac{eE}{\pi} \rightarrow \frac{eE}{\pi} \frac{eB}{2\pi}$ )

$$\partial_\mu J_5^\mu = 2m \bar{\psi} i \gamma_5 \psi + \frac{eE}{\pi}$$

陽な破れの寄与 (masslessなら消える)      アノマリー (1+1次元のDirac粒子)

- いろんなスケールの物理現象に顕れる

例) パイオンの主たる崩壊モード  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  [Adler, Bell, Jackiw (1969)]

[Vilenkin, Fukushima, Warringa, Kharzeev, Yamamoto, ...]

例) 異常輸送現象 (Chiral Magnetic Effect, Chiral Separation Effect, Chiral Vortical Effect, ...)

例) 物性系、重イオン衝突、初期宇宙、高強度レーザー系などなどでの実現/実現可能性

# 直感的描像: massless $\Rightarrow$ スペクトルフロー

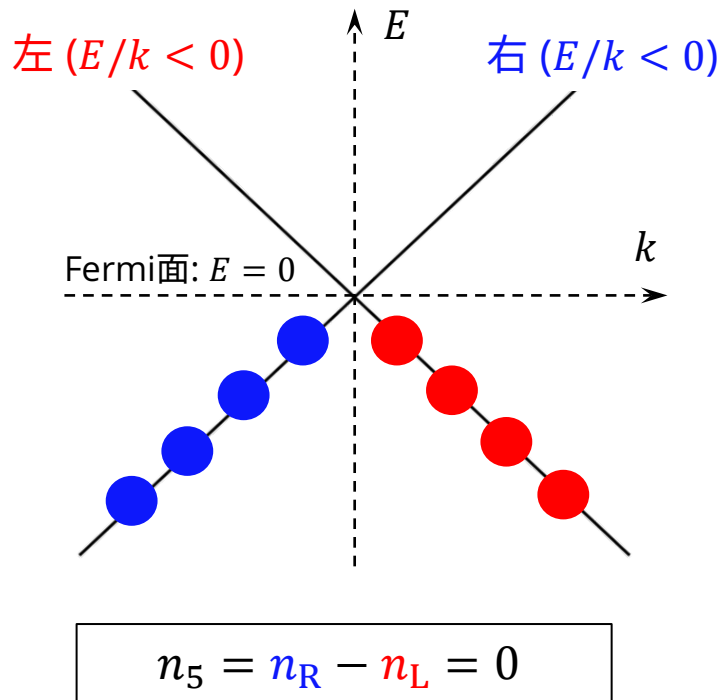
[Nielsen, Ninomiya (1983)]

# 直感的描像: massless $\Rightarrow$ スペクトルフロー

[Nielsen, Ninomiya (1983)]

✓ 1+1次元 massless Dirac 粒子:  $i\partial_t \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_x & 0 \\ 0 & +i\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$

• 右に走る  $\psi_R \propto e^{i(Et-kx)}$  (=右巻き)、左に走る  $\psi_L \propto e^{ik(t+x)}$  (=左巻き) の二つの独立解

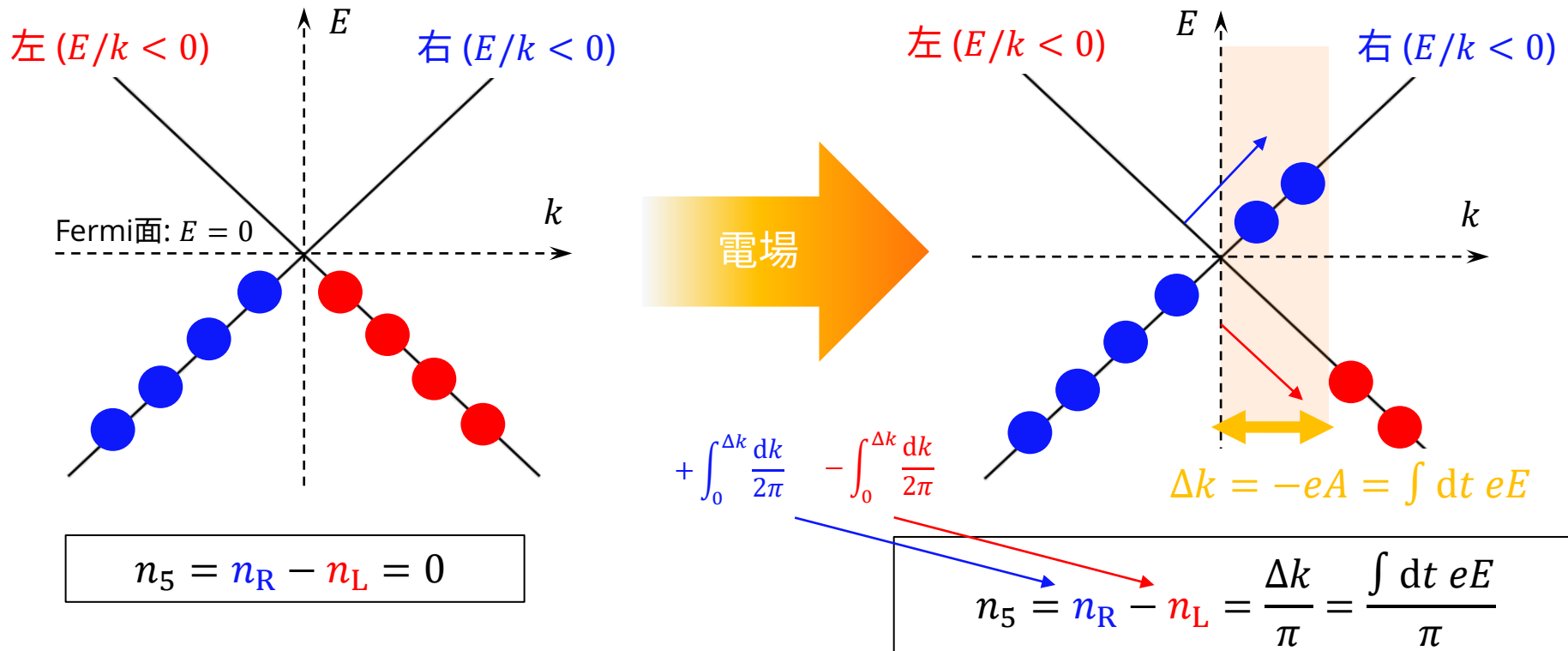


# 直感的描像: massless $\Rightarrow$ スペクトルフロー

[Nielsen, Ninomiya (1983)]

✓ 1+1次元 massless Dirac 粒子:  $i\partial_t \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_x & 0 \\ 0 & +i\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$

• 右に走る  $\psi_R \propto e^{i(Et-kx)}$  (=右巻き)、左に走る  $\psi_L \propto e^{ik(t+x)}$  (=左巻き) の二つの独立解



$\Rightarrow$  (1) 電場で右に加速、(2) 上(下)バンドが詰まる(抜ける)  $\Rightarrow$  カイラルアノマリー

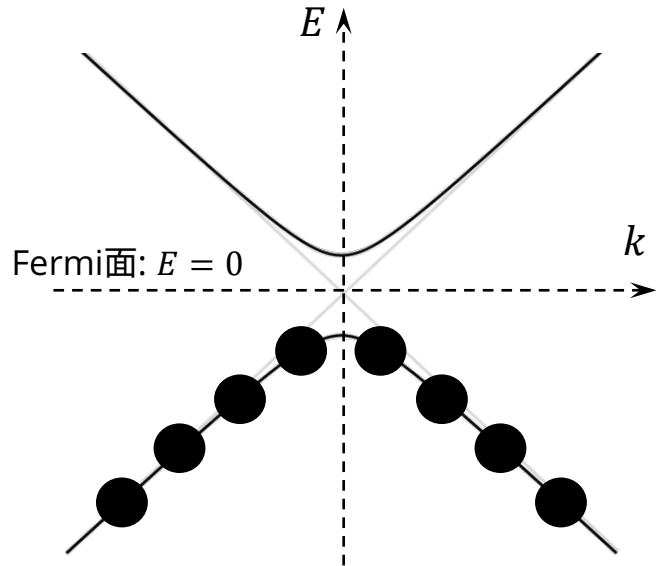
直感的描像: massive  $\Rightarrow$  スペクトルフロー + “粒子生成”

# 直感的描像: **massive** $\Rightarrow$ スペクトルフロー + “粒子生成”

[Fukushima, Warringa,  
Kharzeev, Copinger, Shi,  
Ambjorn, Greensite,  
Peterson, HT, Suzuki, Aoi, ...]

✓ 1+1次元 **massive Dirac** 粒子:  $i\partial_t \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_x & m \\ m & +i\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$

- 右/左巻きは良い量子数でない  $\Rightarrow$  古典レベルで既にカイラル対称性は破れている
- ギャップが空いている  $\Rightarrow$  上と下のバンドは連続的につながっていない



$$n_5 = 0$$

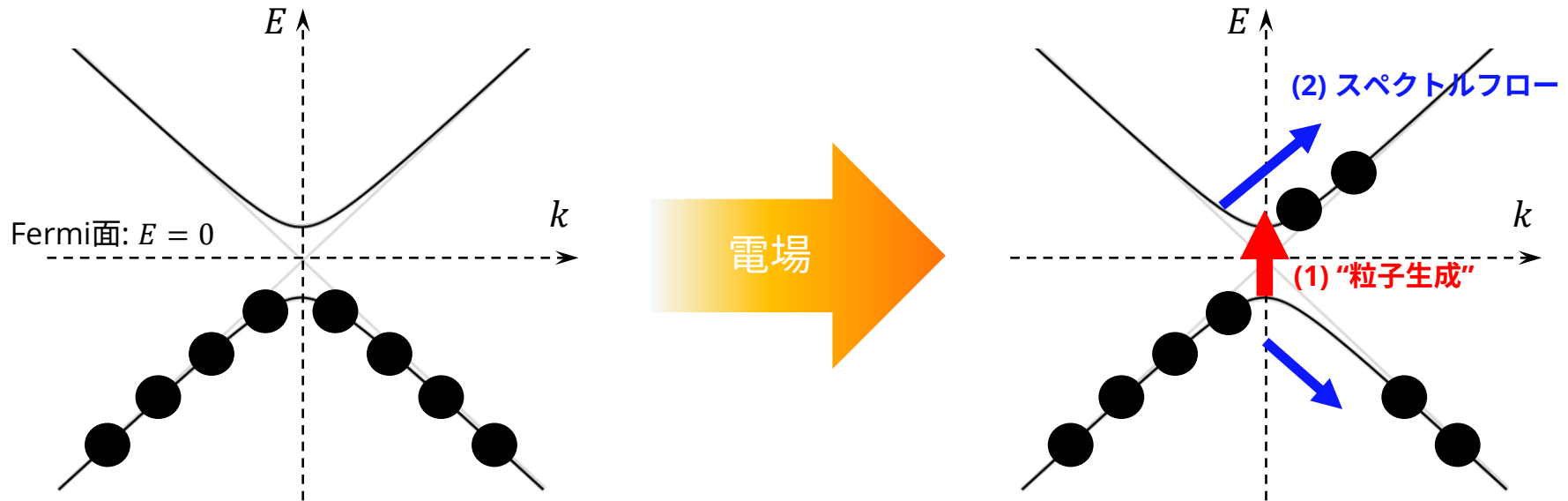


# 直感的描像: **massive** ⇒ スペクトルフロー + “粒子生成”

[Fukushima, Warringa, Kharzeev, Copinger, Shi, Ambjorn, Greensite, Peterson, HT, Suzuki, Aoi, ...]

✓ 1+1次元 **massive Dirac** 粒子:  $i\partial_t \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_x & m \\ m & +i\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$

- 右/左巻きは良い量子数でない ⇒ 古典レベルで既にカイラル対称性は破れている
- ギャップが空いている ⇒ 上と下のバンドは連続的につながっていない



$$n_5 = 0$$

$$n_5 \sim \left( + \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n \right) - \left( - \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n \right) = 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$$

⇒ 下から上に行くダイナミクス = “粒子生成”がないと、スペクトルフローは起きない

⇒ **massiveなカイラルアノマリーには“粒子生成”の物理を理解することが大事**

# 実粒子生成 と 電場の時間依存性

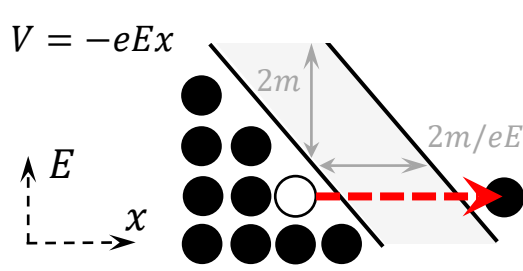
- ✓ 電場の周波数 $\Omega$ の大小で物理がだいぶ違う

# 実粒子生成 と 電場の時間依存性

✓ 電場の周波数 $\Omega$ の大小で物理がだいぶ違う

(Schwinger effect, Landau-Zener transition)

(1)  $\Omega$ 小=遅い: 電場はコヒーレントに相互作用  $\Rightarrow$  トンネリングによる非摂動的な粒子生成



$$\Delta n \sim \exp \left[ -\# \times \left( \begin{array}{c} \text{ギャップ} \\ \text{の高さ} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{ギャップ} \\ \text{の長さ} \end{array} \right) \right] \sim \exp \left[ -\pi \frac{m^2}{eE} \right]$$

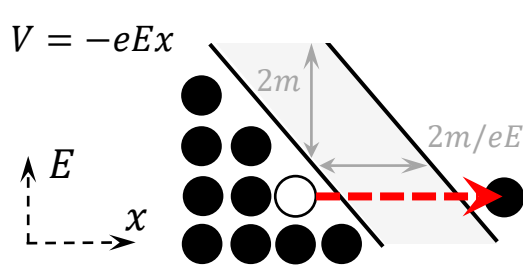
- 質量について指数関数的  $\Rightarrow \Delta n$ は強く抑制
- $\gamma := \frac{m\Omega}{eE} \ll 1$ ,  $\nu := \frac{eE}{\Omega^2} \gg 1$  のときに支配的

# 実粒子生成 と 電場の時間依存性

✓ 電場の周波数 $\Omega$ の大小で物理がだいぶ違う

(Schwinger effect, Landau-Zener transition)

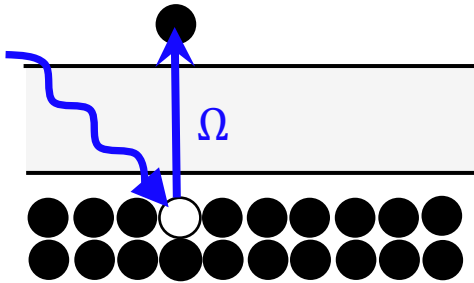
(1)  $\Omega$ 小=遅い: 電場はコヒーレントに相互作用  $\Rightarrow$  トンネリングによる非摂動的な粒子生成



$$\Delta n \sim \exp \left[ -\# \times \left( \begin{array}{c} \text{ギャップ} \\ \text{の高さ} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{ギャップ} \\ \text{の長さ} \end{array} \right) \right] \sim \exp \left[ -\pi \frac{m^2}{eE} \right]$$

- 質量について指数関数的  $\Rightarrow \Delta n$ は強く抑制
- $\gamma := \frac{m\Omega}{eE} \ll 1$ ,  $\nu := \frac{eE}{\Omega^2} \gg 1$  のときに支配的

(2)  $\Omega$ 大=速い: 電場はインコヒーレントに相互作用  $\Rightarrow$  光子による摂動的な粒子生成



$$\Delta n \sim \left| \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{M} \end{array} \right|^2 \propto \left( \frac{eE}{m^2} \right)^2$$

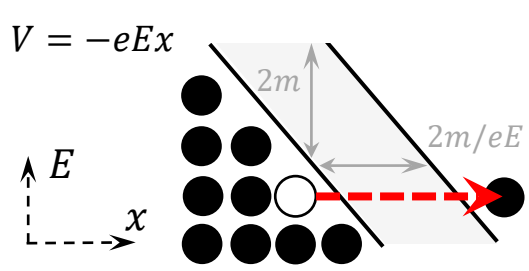
- 質量について冪的  $\Rightarrow \Delta n$ は弱く抑制
- $\gamma = \frac{m\Omega}{eE} \gg 1$ ,  $\nu \equiv \frac{eE}{\Omega^2} \ll 1$  のときに支配的

# 実粒子生成 と 電場の時間依存性

✓ 電場の周波数 $\Omega$ の大小で物理がだいぶ違う

(Schwinger effect, Landau-Zener transition)

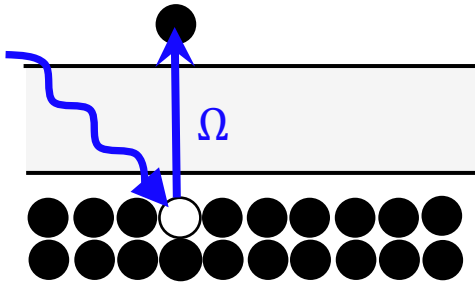
(1)  $\Omega$ 小=遅い: 電場はコヒーレントに相互作用  $\Rightarrow$  トンネリングによる非摂動的な粒子生成



$$\Delta n \sim \exp \left[ -\# \times \left( \begin{array}{c} \text{ギャップ} \\ \text{の高さ} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{ギャップ} \\ \text{の長さ} \end{array} \right) \right] \sim \exp \left[ -\pi \frac{m^2}{eE} \right]$$

- 質量について指数関数的  $\Rightarrow \Delta n$ は強く抑制
- $\gamma := \frac{m\Omega}{eE} \ll 1$ ,  $\nu := \frac{eE}{\Omega^2} \gg 1$  のときに支配的

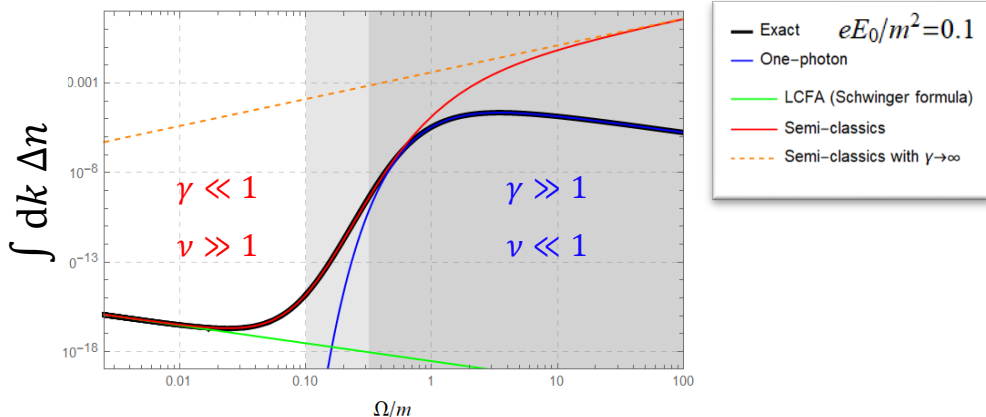
(2)  $\Omega$ 大=速い: 電場はインコヒーレントに相互作用  $\Rightarrow$  光子による摂動的な粒子生成



$$\Delta n \sim \left| \begin{array}{c} E \\ \text{Photon} \end{array} \right|^2 \propto \left( \frac{eE}{m^2} \right)^2$$

- 質量について冪的  $\Rightarrow \Delta n$ は弱く抑制
- $\gamma = \frac{m\Omega}{eE} \gg 1$ ,  $\nu \equiv \frac{eE}{\Omega^2} \ll 1$  のときに支配的

例) Sauter電場  $eE(t) = eE_0/\cosh^2(\Omega t)$  のとき



[HT, Fujii, Itakura, PRD (2014)]

[HT, Fujimori, Misumi, Nitta, Sakai, JHEP (2021)]

- 周波数で定量的にもぜんぜん違う
- 摂動的粒子生成の方が多い  $\Rightarrow$  特にギャップのあたり  $\Omega \sim 2m$  が多い
- 蛇足1: 半古典公式 (例: DDP, worldline) の  $\gamma \rightarrow \infty$  は全然合わないので危険
- 蛇足2: 中間領域はまだちゃんと理解されてなくて、オープンプロブレムだと思う

# 「遅い電場」でのカイラル量子異常

✓ 定常電場  $E(x, t) = E$  について、アノマリー関係式  $\partial_\mu J_5^\mu = 2m \bar{\psi} i \gamma_5 \psi + \frac{eE}{\pi}$  を再考

カイラリティ生成は、 $n_5 = 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n = \frac{\int dt eE}{\pi} \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right]$  だから、

$$\partial_\mu J_5^\mu = \partial_t n_5 = \frac{eE}{\pi} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}} \quad 2m \bar{\psi} i \gamma_5 \psi = \frac{eE}{\pi} \left(1 - e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}\right)$$

よって (ちなみに、この式は実は厳密に正しいことが示せる) [Copinger, Fukushima, Shi (2018)]

$$\frac{eE}{\pi} = \frac{eE}{\pi} \left(1 - e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}\right) + \frac{eE}{\pi} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}$$

アノマリー

陽な破れ寄与

カイラリティ生成の寄与

# 「遅い電場」でのカイラル量子異常

✓ 定常電場  $E(x, t) = E$  について、アノマリー関係式  $\partial_\mu J_5^\mu = 2m \bar{\psi} i \gamma_5 \psi + \frac{eE}{\pi}$  を再考

カイラリティ生成は、 $n_5 = 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n = \frac{\int dt eE}{\pi} \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right]$  だから、

$$\partial_\mu J_5^\mu = \partial_t n_5 = \frac{eE}{\pi} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}} \quad 2m \bar{\psi} i \gamma_5 \psi = \frac{eE}{\pi} \left(1 - e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}\right)$$

よって (ちなみに、この式は実は厳密に正しいことが示せる) [Copinger, Fukushima, Shi (2018)]

$$\frac{eE}{\pi} = \frac{eE}{\pi} \left(1 - e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}\right) + \frac{eE}{\pi} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}$$

アノマリー

陽な破れ寄与

カイラリティ生成の寄与

✓ ここで疑問になること

(1) 非自明なカイラリティ生成の部分(■)は質量で強く抑制

⇒ 普通は、自明な陽な破れな寄与(■)でアノマリーがサチってしまう

⇒ Q: 非自明なカイラリティ生成を実験とかで見るためにはどうしたらよいのか???

(2) masslessだと■でサチっているが、massiveだと■でサチる

⇒ Q: 一般には、どういう風に2つの寄与が配分されているのか???

(アノマリー関係式は配分の詳細まで教えてくれない。遅い電場でしか議論が今んとこない。)

# カイラリティ生成を増幅するには？ (1/2)

方針: “生成粒子数 $\Delta n$ ”を増やせばよい ( $\because n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$ )

アイデア: 速い電場による“粒子生成”を利用する



# カイラリティ生成を増幅するには？ (1/2)

方針: “生成粒子数 $\Delta n$ ”を増やせばよい ( $\because n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$ )

アイデア: 速い電場による“粒子生成”を利用する

✓ 田屋は利用方法が2通りあると思う (逆に他の利用方法・アイデアは知らないなので、あればおもしろいと思う)

# カイラリティ生成を増幅するには？ (1/2)

方針: “生成粒子数 $\Delta n$ ”を増やせばよい ( $\because n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$ )

アイデア: 速い電場による“粒子生成”を利用する

✓ 田屋は利用方法が2通りあると思う (逆に他の利用方法・アイデアは知らないなので、あればおもしろいと思う)

利用法(1): 遅い強い電場の上に、速い弱い電場を重ね合わせる [HI (2020)]

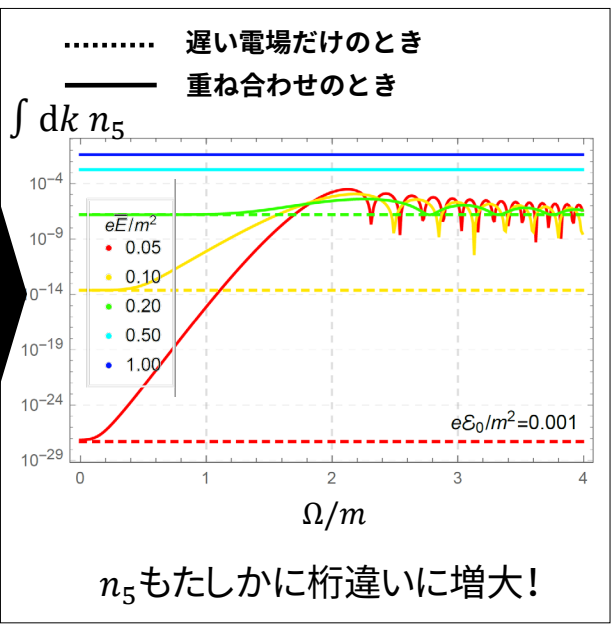
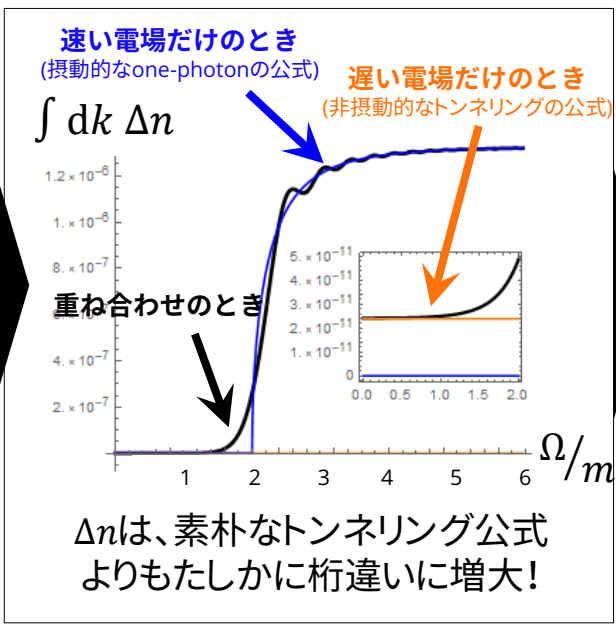
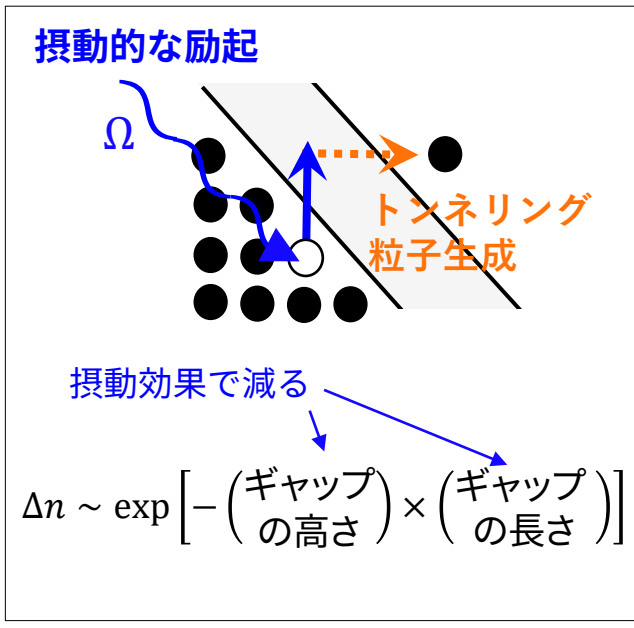
# カイラリティ生成を増幅するには？ (1/2)

方針: “生成粒子数 $\Delta n$ ”を増やせばよい ( $\because n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$ )  
 アイデア: 速い電場による“粒子生成”を利用する

✓ 田屋は利用方法が2通りあると思う (逆に他の利用方法・アイデアは知らないなので、あればおもしろいと思う)

## 利用法(1): 遅い強い電場の上に、速い弱い電場を重ね合わせる [HT (2020)]

Dynamically assisted Schwinger mechanism (物性で言うFranz-Keldysh効果) が粒子生成を増大  
 [Schutzhold, Gies, Dunne (2008)] [Franz (1958)] [Keldysh (1958)] [HT (2019)]



# カイラリティ生成を増幅するには？ (2/2)

方針: “生成粒子数 $\Delta n$ ”を増やせばよい ( $\because n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$ )

アイデア: 速い電場による“粒子生成”を利用する

✓ 田屋は利用方法が2通りあると思う (逆に他の利用方法・アイデアは知らないなので、あればおもしろいと思う)

利用法(2): 遅い電場は忘れて、速い強い電場だけを印加する

# カイラリティ生成を増幅するには？ (2/2)

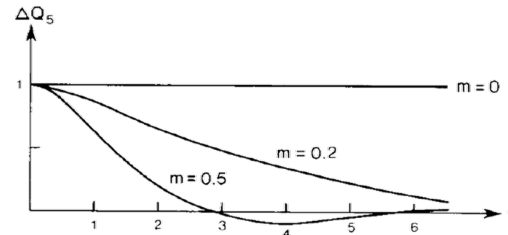
方針: “生成粒子数 $\Delta n$ ”を増やせばよい ( $\because n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$ )  
アイデア: 速い電場による“粒子生成”を利用する

✓ 田屋は利用方法が2通りあると思う (逆に他の利用方法・アイデアは知らないなので、あればおもしろいと思う)

## 利用法(2): 遅い電場は忘れて、速い強い電場だけを印加する

- 速い電場による摂動論的な粒子生成が粒子生成を増大しそう
- 短径型のパルス電場のときはたしかにそうになっている

[Ambjorn, Greensite, Peterson (1983)]



$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ At/\tau & \text{for } 0 \leq t \leq \tau, \\ A & \text{for } t > \tau. \end{cases}$$

Fig. 5.  $\Delta Q_5$  measured in units of the anomaly  $(e/2\pi) \int dx \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 1$  as a function of  $\tau$  in the 1+1 dimensional continuum theory with linear potential (eq. (2.36)).

# カイラリティ生成を増幅するには？ (2/2)

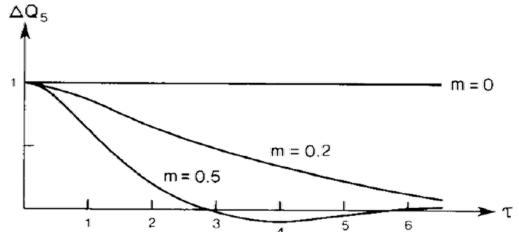
方針: “生成粒子数 $\Delta n$ ”を増やせばよい ( $\because n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n$ )  
 アイデア: 速い電場による“粒子生成”を利用する

✓ 田屋は利用方法が2通りあると思う (逆に他の利用方法・アイデアは知らないの、あればおもしろいと思う)

## 利用法(2): 遅い電場は忘れて、速い強い電場だけを印加する

- 速い電場による摂動論的な粒子生成が粒子生成を増大しそう
- 短径型のパルス電場ときはたしかにそうになっている

[Ambjorn, Greensite, Peterson (1983)]

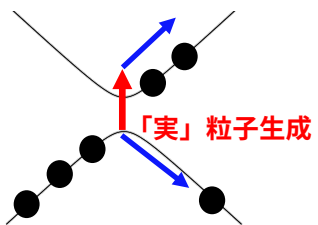


$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0, \\ At/\tau & \text{for } 0 \leq t \leq \tau, \\ A & \text{for } t > \tau. \end{cases}$$

Fig. 5.  $\Delta Q_5$  measured in units of the anomaly  $(e/2\pi) \int dx \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 1$  as a function of  $\tau$  in the 1+1 dimensional continuum theory with linear potential (eq. (2.36)).

- しかし、Floquet系のような「**周期**」電場が「**とても**」速いときは、ちょっと非自明
  - ⇒ 「**実**」粒子が「**仮想**」粒子と区別できるためには、 $\Delta t \geq 1/m$  くらいの時間が必要
  - ⇒ しかし、周波数がとても速い  $\Omega \geq 1/m$  と、 $\Delta t$  くらいの時間を待てない (加えて、厳密に周期的だと漸近状態もない)
  - ⇒ 「**実**」粒子が well-defined に定義できず、**今までの「実」粒子生成の描像は良くない**。「**仮想**」粒子が効く。

### 「実」粒子の寄与 (intra-bandな寄与)

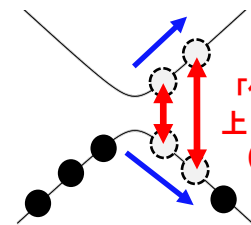


$$n_5 \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n \sim \Delta k \Delta n \propto (eE)^3$$

$\sim -eA = \int dt eE$

$\sim \# (eE/m^2)^2$

### 「仮想」粒子の寄与 (inter-bandな寄与)



「仮想」粒子を介した上と下のバンドの干渉 (Zitterbewegung)  
 $n_5 \sim ???$

# 結局、今日何をしたいか

## 背景

Massiveなカイラルアノマリーは「遅い」電場に対してはよくわかっている

- 物理描像: 実粒子生成 + スペクトルフロー
- 定量的性質: 質量に対して指数関数的に強く抑制されている

## 問題

「速い」電場に対するMassiveなカイラルアノマリーはどうなっているのか？

Q1: 一般の高周波電場の場合にカイラリティ生成は増大するか？

Q2: アノマリーはどのような風に分配されているか？

Q3:  $n_5$ のパラメタ依存性は遅い電場 (or 実粒子生成の描像) と比べて変わるか？

## 手法

Floquet理論、特に高周波展開(van Vleck 展開)、に基づき答えを与える

1. Introduction

**2. 1+1次元のMassless Weyl 粒子  
のアノマリーのFloquet解析**

3. 1+1次元のMassive Dirac 粒子  
のアノマリーのFloquet解析

4. まとめ



# 手法: van Vleck 高周波展開

# 手法: van Vleck 高周波展開

## ✓ 問題設定

1+1次元で時間周期的な系  $H(t, x) = H(t + T, x)$

# 手法: van Vleck 高周波展開

## ✓ 問題設定

1+1次元で時間周期的な系  $H(t, x) = H(t + T, x)$

## ✓ Floquetの定理

ユニタリ時間並進演算子  $U(t, t'; x)$  は

$$U(t, t'; x) = e^{-iK(t', x)} e^{+iH_F(x)(t-t')} e^{+iK(t, x)}$$

と書ける。ここで、 $K(t, x) = K(t + T, x)$  で  $H_F(x)$  は時間に依存しない。

# 手法: van Vleck 高周波展開

## ✓ 問題設定

1+1次元で時間周期的な系  $H(t, x) = H(t + T, x)$

## ✓ Floquetの定理

ユニタリ時間並進演算子  $U(t, t'; x)$  は

$$U(t, t'; x) = e^{-iK(t', x)} e^{+iH_F(x)(t-t')} e^{+iK(t, x)}$$

と書ける。ここで、 $K(t, x) = K(t + T, x)$  で  $H_F(x)$  は時間に依存しない。

## ✓ 高周波展開

$-i\partial_t U(t, t'; x) = H(t; x)U(t, t'; x)$  を使うと、

$$H_F(x) = e^{+iK(t, x)} H(t, x) e^{-iK(t, x)} + i \frac{\partial e^{+iK(t, x)}}{\partial t} e^{-iK(t, x)}$$

これを時間微分が大きい  $\partial_t \rightarrow \epsilon^{-1} \partial_t$  ( $\epsilon \ll 1$ ) と思い、 $H_F, K$  を

$$H_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n H_F^{(n)}(x) \quad K(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n K^{(n)}(t, x)$$

と開いて逐次的に解く方法

**注意(1)** 実はこれだけで式が閉じない  $\Rightarrow$  時間原点の任意性 ("フロクゲージ自由度") を殺すと閉じる

$$\text{van Vleck 展開の"ゲージ固定条件": } \int_0^T dt K(t, x) = 0$$

**注意(2)** 大雑把に、2項目が1項目よりも十分に大きいときに収束  $\Rightarrow \|H\|T \ll 1$  なら収束しそう

# 1+1次元のMassless Weyl 右巻き粒子

## ✓ 1+1次元 massless Weyl 右巻き粒子

$$i\partial_t\psi(t,x) = H(t,x)\psi(t,x) \quad \text{where} \quad H(t,x) := -i\partial_x + eA^0 \quad (\text{簡単のため、} eA^1 = 0 \text{ ゲージ})$$

⇒ 所詮1階微分方程式なので解析的に解ける。高周波展開も任意のオーダーまで求まる。

⇒ Floquet理論とアノマリーの関係を理解する良い練習問題

# 1+1次元のMassless Weyl 右巻き粒子

## ✓ 1+1次元 massless Weyl 右巻き粒子

$i\partial_t\psi(t, x) = H(t, x)\psi(t, x)$  where  $H(t, x) := -i\partial_x + eA^0$  (簡単のため、 $eA^1 = 0$  ゲージ)

⇒ 所詮1階微分方程式なので解析的に解ける。高周波展開も任意のオーダーまで求まる。

⇒ Floquet理論とアノマリーの関係を理解する良い練習問題

## ✓ 計算の流れ

**Step 1:** Floquet Hamiltonian  $H_F$  と kick operator  $K$  を van Vleck 展開で求める

**Step 2:** 対応する波動関数  $\psi_k$  を求めて、 $\psi$  を量子化する  $\psi \rightarrow \hat{\psi} = \int_0^{+\infty} dk [\psi_k \hat{a}_k + \psi_{-k} \hat{b}_k^\dagger]$

**Step 3:** カイラルカレント  $J_5^0 = J_5^1 = \langle \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \rangle$  を point-splitting正則化で求める

$$\langle \hat{\psi}^\dagger(x) O \hat{\psi}(x) \rangle := \lim_{\epsilon^\mu \rightarrow 0} \underbrace{\langle \hat{\psi}^\dagger(x^\mu + \epsilon^\mu/2) O \hat{\psi}(x^\mu - \epsilon^\mu/2) \rangle}_{\text{ズラすことでUV発散を殺す}} \underbrace{\exp \left[ -i \int_{x^\mu - \frac{\epsilon^\mu}{2}}^{x^\mu + \frac{\epsilon^\mu}{2}} dx^\mu eA_\mu \right]}_{\text{ゲージ不変性を担保}}$$

**Step 4:** アノマリー関係式を見るため、カイラルカレントの発散を調べる  $\partial_\mu J_5^\mu$

# 注意: パワーカウンティング

- ✓  $n$ 次 or  $O(T^n)$ までカイラルアノマリーを調べたければ、  
( $n+2$ )次 or  $O(T^{n+2})$ まで $H_F$ と $K$ を求める必要 (Weylに限らずどんな粒子でも)

## ✓ 計算の流れ

Step 1: Floquet Hamiltonian  $H_F$  と kick operator  $K$  を van Vleck 展開で求める

Step 2: 対応する波動関数 $\psi_k$ を求めて、 $\psi$ を量子化する  $\psi \rightarrow \hat{\psi} = \int_0^{+\infty} dk [\psi_k \hat{a}_k + \psi_{-k} \hat{b}_k^\dagger]$

Step 3: カイラルカレント  $J_5^0 = J_5^1 = \langle \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \rangle$  を point-splitting正則化 で求める

$$\langle \hat{\psi}^\dagger(x) O \hat{\psi}(x) \rangle := \lim_{\epsilon^\mu \rightarrow 0} \underbrace{\langle \hat{\psi}^\dagger(x^\mu + \epsilon^\mu/2) O \hat{\psi}(x^\mu - \epsilon^\mu/2) \rangle}_{\text{ズラすことでUV発散を殺す}} \underbrace{\exp \left[ -i \int_{x^\mu - \frac{\epsilon^\mu}{2}}^{x^\mu + \frac{\epsilon^\mu}{2}} dx^\mu e A_\mu \right]}_{\text{ゲージ不変性を担保}}$$

Step 4: カイラルカレントの発散を調べる  $\partial_\mu J_5^\mu$

余計な時間微分1個湧く

⇒ 高周波展開は **時間微分が大きい**  $\partial_t \rightarrow \epsilon^{-1} \partial_t$  ( $\epsilon \ll 1$ ) **展開** なので、展開のオーダーが1つ悪くなる

# 結果(1/2): $H_F$ と $K$

$$H_F(x) = \tilde{H}_0(x) := \int_0^T \frac{dt}{T} H(t, x) \quad K(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\partial_x)^{n-1} \int^t dt_n \int^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int^{t_2} dt_1 eA^0(t_1, x)$$



# 結果(1/2): $H_F$ と $K$

$$H_F(x) = \tilde{H}_0(x) := \int_0^T \frac{dt}{T} H(t, x) \quad K(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\partial_x)^{n-1} \int^t dt_n \int^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int^{t_2} dt_1 eA^0(t_1, x)$$

✓ Floquet Hamiltonian は自明で、kick operator だけが非自明

⇒ 非自明な物理 (含アノマリー) は、kick operator から出てくる

# 結果(1/2): $H_F$ と $K$

$$H_F(x) = \tilde{H}_0(x) := \int_0^T \frac{dt}{T} H(t, x) \quad K(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\partial_x)^{n-1} \int^t dt_n \int^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int^{t_2} dt_1 eA^0(t_1, x)$$

✓ Floquet Hamiltonian は自明で、kick operator だけが非自明

⇒ 非自明な物理 (含アノマリー) は、kick operator から出てくる

✓ Kick operator は有限の収束半径を持つ (幾何級数的な振る舞い)

$$\frac{K^{(n+1)}}{K^{(n)}} \sim \left\| \partial_x \int dt \right\| \sim L/T \Rightarrow \text{空間変調が大きいと van Vleck 展開は破綻}$$

# 結果(1/2): $H_F$ と $K$

$$H_F(x) = \tilde{H}_0(x) := \int_0^T \frac{dt}{T} H(t, x) \quad K(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\partial_x)^{n-1} \int^t dt_n \int^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int^{t_2} dt_1 eA^0(t_1, x)$$

✓ Floquet Hamiltonian は自明で、kick operator だけが非自明

⇒ 非自明な物理 (含アノマリー) は、kick operator から出てくる

✓ Kick operator は有限の収束半径を持つ (幾何級数的な振る舞い)

$$\frac{K^{(n+1)}}{K^{(n)}} \sim \left\| \partial_x \int dt \right\| \sim L/T \Rightarrow \text{空間変調が大きいと van Vleck 展開は破綻}$$

回避策(1): Floquet展開を  $x$  方向に適用。一般に、系が一番早く変調している方向

$$i\partial_t \psi(t, x) = H(t, x) \psi(t, x)$$

$$\rightarrow i\partial_x \psi(t, x) = \mathcal{H}(t, x) \psi(t, x) \Rightarrow \frac{K^{(n+1)}}{K^{(n)}} \sim \left\| \partial_t \int dx \right\| \sim T/L$$

# 結果(1/2): $H_F$ と $K$

$$H_F(x) = \tilde{H}_0(x) := \int_0^T \frac{dt}{T} H(t, x) \quad K(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\partial_x)^{n-1} \int^t dt_n \int^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int^{t_2} dt_1 eA^0(t_1, x)$$

✓ Floquet Hamiltonian は自明で、kick operator だけが非自明

⇒ 非自明な物理 (含アノマリー) は、kick operator から出てくる

✓ Kick operator は有限の収束半径を持つ (幾何級数的な振る舞い)

$$\frac{K^{(n+1)}}{K^{(n)}} \sim \left\| \partial_x \int dt \right\| \sim L/T \Rightarrow \text{空間変調が大きいと van Vleck 展開は破綻}$$

回避策(1): Floquet展開を  $x$  方向に適用。一般に、系が一番早く変調している方向

$$i\partial_t \psi(t, x) = H(t, x) \psi(t, x)$$

$$\rightarrow i\partial_x \psi(t, x) = \mathcal{H}(t, x) \psi(t, x) \Rightarrow \frac{K^{(n+1)}}{K^{(n)}} \sim \left\| \partial_t \int dx \right\| \sim T/L$$

回避策(2): 総和 ( $n$ の和) をがんばって取る

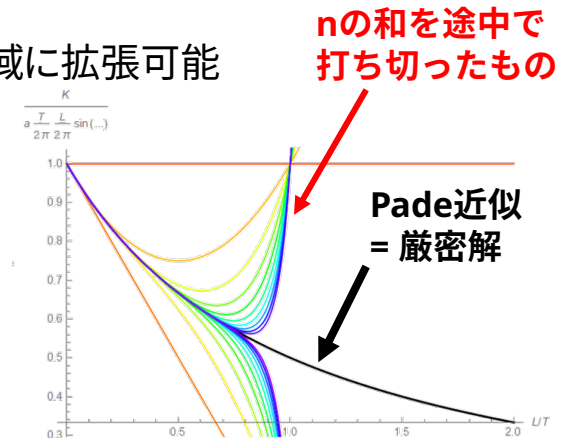
• 今は全項知っているので、解析的に取れる ⇒ 取った後の関数は  $T/L$  全域に拡張可能

• 全項知らないときは、近似的総和法が使えるかも。例えば、Pade近似。

$$\text{例) } A^0 = a \frac{L}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{L}\right) \Rightarrow K = a \frac{T}{2\pi} \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{L}{T}\right)^{n-1}$$

(蛇足: 一般の場合もたかだが  $n!$ なので、Borel和が使えるかも? リサージェンス?)

[Kuwabara, Mori, Saito (2016)]



# 結果(2/2): $J_5^\mu$ とアノマリー関係式

便宜的に高周波展開のbookkeeping parameter  $\epsilon$  (s. t.  $\partial_t \rightarrow \epsilon^{-1} \partial_t$ ) を陽に書くことにすると、

$$\begin{aligned} J_5^0(t, x) = J_5^1(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (-\partial_x)^n \int^t dt_n \int^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int^{t_2} dt_1 eA^0(t_1, x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \underbrace{-\epsilon \partial_x \int^t dt' eA^0(t', x)}_{\text{主要項}} + \underbrace{\epsilon^2 \partial_x^2 \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0(t'', x)}_{\text{高次の項}} + O(\epsilon^3) \right] \end{aligned}$$

# 結果(2/2): $J_5^\mu$ とアノマリー関係式

便宜的に高周波展開のbookkeeping parameter  $\epsilon$  (s. t.  $\partial_t \rightarrow \epsilon^{-1} \partial_t$ ) を陽に書くことにすると、

$$\begin{aligned} J_5^0(t, x) = J_5^1(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (-\partial_x)^n \int^t dt_n \int^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int^{t_2} dt_1 eA^0(t_1, x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \boxed{-\epsilon \partial_x \int^t dt' eA^0(t', x)} + \boxed{\epsilon^2 \partial_x^2 \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0(t'', x)} + O(\epsilon^3) \right] \end{aligned}$$

主要項 高次の項

発散を計算すると、

$$\partial_\mu J_5^\mu = \epsilon^{-1} \partial_t J_5^0 + \partial_x J_5^1 = \frac{1}{2\pi} \left[ \boxed{eE(t, x)} + \boxed{0} \right]$$

高次の $O(\epsilon^1)$ はすべてキャンセルする!

これはよく知られたアノマリーの関係式に他ならない

**⇒ カイラルアノマリーは、高周波展開の低次で捉えきれる**

1. Introduction

2. 1+1次元のMassless Weyl 粒子  
のアノマリーのFloquet解析

**3. 1+1次元のMassive Dirac 粒子  
のアノマリーのFloquet解析**

4. まとめ

# 1+1次元のMassive Dirac 粒子

## ✓ 1+1次元 massive Dirac 粒子

$$i\partial_t\psi(t,x) = H(t,x)\psi(t,x) \quad \text{where} \quad H(t,x) := \begin{pmatrix} -i\partial_x + eA^0 & m \\ m & +i\partial_x + eA^0 \end{pmatrix}$$

(簡単のため、 $eA^1 = 0$  ゲージ)



# 1+1次元のMassive Dirac 粒子

## ✓ 1+1次元 massive Dirac 粒子

$$i\partial_t\psi(t,x) = H(t,x)\psi(t,x) \quad \text{where} \quad H(t,x) := \begin{pmatrix} -i\partial_x + eA^0 & m \\ m & +i\partial_x + eA^0 \end{pmatrix}$$

(簡単のため、 $eA^1 = 0$  ゲージ)

## ✓ 計算の流れ

基本的な流れはWeyl粒子の場合とまったく同じ

**Step 1:** Floquet Hamiltonian  $H_F$  と kick operator  $K$  を van Vleck 展開で求める

**Step 2:** 対応する波動関数  $\psi_k$  を求めて、 $\psi$  を量子化する  $\psi \rightarrow \hat{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk [\psi_{+,k} \hat{a}_k + \psi_{-,k} \hat{b}_{-k}^\dagger]$

**Step 3:** カイラルカレント  $J_5^\mu = \langle \hat{\psi}^\dagger \gamma^\mu \gamma_5 \hat{\psi} \rangle$  と 疑スカラー凝縮  $P = \langle \hat{\psi}^\dagger i\gamma_5 \hat{\psi} \rangle$   
をpoint-splitting正則化で求める

**Step 4:** アノマリー関係式を見るため、カイラルカレントの発散を調べる  $\partial_\mu J_5^\mu$

# 結果(1/3): $H_F$ と $K$

$$H_F(x) = \tilde{H}_0(x) + \epsilon^4 \times (-2)m \sum_{l \neq 0} \left( \frac{T}{2\pi l} \right)^4 |e\tilde{E}_l(x)|^2 \sigma_x + O(\epsilon^5)$$

$$K(t, x) = 0 + \epsilon^1 \int^t dt' eA^0(t', x) + \epsilon^2 (-\partial_x) \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0(t'', x) \sigma_z \\ + \epsilon^3 \int^t dt' \int^{t'} dt'' \int^{t''} dt''' [(-\partial_x)^2 - 2m(-\partial_x) \sigma_y] eA^0(t''', x) + O(\epsilon^4)$$

# 結果(1/3): $H_F$ と $K$

$$H_F(x) = \tilde{H}_0(x) + \epsilon^4 \times (-2)m \sum_{l \neq 0} \left( \frac{T}{2\pi l} \right)^4 |e\tilde{E}_l(x)|^2 \sigma_x + O(\epsilon^5)$$

$$K(t, x) = 0 + \epsilon^1 \int^t dt' eA^0(t', x) + \epsilon^2 (-\partial_x) \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0(t'', x) \sigma_z \\ + \epsilon^3 \int^t dt' \int^{t'} dt'' \int^{t''} dt''' [(-\partial_x)^2 - 2m(-\partial_x) \sigma_y] eA^0(t''', x) + O(\epsilon^4)$$

✓ Kick operatorは低次補正を受けるが、Floquet Hamiltonian は高次補正を受けるだけ

⇒ Weylの場合と同様に、非自明な物理は基本的に kick operator から出てくる

✓ 有限質量効果は高次効果

⇒ 有限質量効果は高周波領域では無視できる

✓ Floquet Hamiltonianの高次補正は、質量を有効的に下げる効果  $m_{\text{eff}} < m$

蛇足: mass shiftの符号や大きさについて統一的な理解はないので、何かわかるとおもしろいと思う

例1) Volkov状態(平面波中の電子):  $m_{\text{eff}} = m\sqrt{1 + \#E^2}$  ( $\because$  時間平均すると、Pondermotive energyだけ太る) [Wolkow (1935)]

例2) 回転電場:  $m_{\text{eff}} = m + \#\Omega$  ( $\because$  幾何学的効果 ("Twisted" Landau Zener effect)) [Takayoshi, Oka (2020)]  
[Berry (1990)]

例3) 定常電場:  $m_{\text{eff}}$  は分布を持つが典型的に  $m_{\text{eff}} > m$  ( $\because$  Dirac sea 中の電子の分布) [HT (2018)]

## 結果(2/3): $J_5^\mu$ と $P$

$$J_5^0(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ -\epsilon^1 \partial_x \int^t dt' eA^0 - \epsilon^3 (\partial_x^3 - 2m^2 \partial_x) \int^t dt' \int^{t'} dt'' \int^{t''} dt''' eA^0 + O(\epsilon^5) \right]$$

$$J_5^1(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ +\epsilon^2 \partial_x^2 \int^t dt' \int^t dt'' eA^0 + O(\epsilon^4) \right]$$

$$P = \langle \hat{\psi}^\dagger i\gamma_5 \hat{\psi} \rangle = \epsilon^2 \frac{m}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4)$$

# 結果(2/3): $J_5^\mu$ と $P$

$$J_5^0(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ -\epsilon^1 \partial_x \int^t dt' eA^0 - \epsilon^3 (\partial_x^3 - 2m^2 \partial_x) \int^t dt' \int^{t'} dt'' \int^{t''} dt''' eA^0 + O(\epsilon^5) \right]$$

$$J_5^1(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ +\epsilon^2 \partial_x^2 \int^t dt' \int^t dt'' eA^0 + O(\epsilon^4) \right]$$

$$P = \langle \hat{\psi}^\dagger i\gamma_5 \hat{\psi} \rangle = \epsilon^2 \frac{m}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4)$$

## ✓ 有限質量効果は高次効果

⇒ 有限質量効果は高周波領域では無視できる

## ✓ 「遅い」電場のときとはぜんぜんパラメタ依存性が違う

$$J_5^0(t, x) \sim 2 \int_0^{\Delta k} \frac{dk}{2\pi} \Delta n \sim \frac{1}{\pi} \Delta k \Delta n \sim \frac{1}{\pi} \int^t dt' eE(t', x) e^{-\pi \frac{m^2}{|eE(t, x)|}}$$

$$P(t, x) \sim \frac{eE(t', x)}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi \frac{m^2}{|eE(t, x)|}}}{2m}$$

特に、「速い」電場のカイラリティ生成は、質量(割ることの電場)について指数関数的な抑制がない

⇒ 「速い」電場でのカイラリティ生成の増大 (電場が弱くても周波数が大きければよい)

# 結果(3/3): アノマリー関係式

$$J_5^0(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ -\epsilon^1 \partial_x \int^t dt' eA^0 - \epsilon^3 (\partial_x^3 - 2m^2 \partial_x) \int^t dt' \int^{t'} dt'' \int^{t''} dt''' eA^0 + O(\epsilon^5) \right]$$

$$J_5^1(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ +\epsilon^2 \partial_x^2 \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4) \right]$$

$$P = \langle \hat{\psi}^\dagger i\gamma_5 \hat{\psi} \rangle = \epsilon^2 \frac{m}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4)$$

発散を計算すると、たしかにアノマリー関係式を満たす:

$$\frac{eE}{\pi} = \frac{eE}{\pi} - \epsilon^2 \frac{2m^2}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4) + \epsilon^2 \frac{2m^2}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4)$$

アノマリー

カイラリティ生成の寄与 =  $\partial_\mu J_5^\mu$

陽な破れの寄与 =  $2mP$

# 結果(3/3): アノマリー関係式

$$J_5^0(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ -\epsilon^1 \partial_x \int^t dt' eA^0 - \epsilon^3 (\partial_x^3 - 2m^2 \partial_x) \int^t dt' \int^{t'} dt'' \int^{t''} dt''' eA^0 + O(\epsilon^5) \right]$$

$$J_5^1(t, x) = \frac{1}{\pi} \left[ +\epsilon^2 \partial_x^2 \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4) \right]$$

$$P = \langle \hat{\psi}^\dagger i\gamma_5 \hat{\psi} \rangle = \epsilon^2 \frac{m}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4)$$

発散を計算すると、たしかにアノマリー関係式を満たす:

$$\frac{eE}{\pi} = \frac{eE}{\pi} - \cancel{\epsilon^2 \frac{2m^2}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4)} + \cancel{\epsilon^2 \frac{2m^2}{\pi} \partial_x \int^t dt' \int^{t'} dt'' eA^0 + O(\epsilon^4)}$$

アノマリー

カイラリティ生成の寄与 =  $\partial_\mu J_5^\mu$

陽な破れの寄与 =  $2mP$

✓ Weylのときと同じように、低次の寄与がアノマリーを捉えきっている

✓ 「遅い」電場のときと比べ、アノマリーの配分の仕方が違う

$$\frac{eE}{\pi} = \cancel{\frac{eE}{\pi} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}} + \frac{eE}{\pi} \left( 1 - e^{-\pi \frac{m^2}{eE}} \right)$$

アノマリー

カイラリティ生成の寄与 =  $\partial_\mu J_5^\mu$

陽な破れの寄与 =  $2mP$

⇒ アノマリーは、電場が速い/遅いとカイラリティ生成/陽な破れの寄与でサチる

# 1. Introduction

## 2. 1+1次元のMassless Weyl 粒子 のアノマリーのFloquet解析

## 3. 1+1次元のMassive Dirac 粒子 のアノマリーのFloquet解析

## 4. まとめ



# 今日のまとめ

## 背景

- Massiveなカイラルアノマリーは「遅い」電場に対してはよくわかっている
- 物理描像: 実粒子生成 + スペクトルフロー
  - 定量的性質: 質量に対して指数関数的に強く抑制されている

## 問題

- 「速い」電場に対するMassiveなカイラルアノマリーはどうなっているのか？
- Q1: 一般の高周波電場の場合にカイラリティ生成は増大するか？
- Q2: アノマリーはどのような風に分配されているか？
- Q3:  $n_5$ のパラメタ依存性は遅い電場 (or 実粒子生成の描像) と比べて変わるか？

## 手法

Floquet理論、特に高周波展開(van Vleck 展開)、に基づき答えを与える

# 今日のまとめ

## 背景

- Massiveなカイラルアノマリーは「遅い」電場に対してはよくわかっている
- 物理描像: 実粒子生成 + スペクトルフロー
  - 定量的性質: 質量に対して指数関数的に強く抑制されている

## 問題

- 「速い」電場に対するMassiveなカイラルアノマリーはどうなっているのか？
- Q1: 一般の高周波電場の場合にカイラリティ生成は増大するか？ ⇒ **YES**
- Q2: アノマリーはどのような風に分配されているか？
- ⇒ **電場が速い/遅いとカイラリティ生成/陽な破れの寄与でサチる**
- Q3:  $n_5$ のパラメタ依存性は遅い電場 (or 実粒子生成の描像) と比べて変わるか？
- ⇒ **変わる。例えば、電場が速いと質量についての指数関数的抑制がない。有限質量効果は、高周波展開の高次で電場が十分に速いと無視できる。**

## 手法

- Floquet理論、特に高周波展開(van Vleck 展開)、に基づき答えを与える
- ⇒ **高周波展開はカイラルアノマリーを調べる良い手法。**
- 特に、アノマリーを展開の低次の項だけで捉えきることができる**