

動的にアシストされたSchwinger機構

(dynamically assisted Schwinger mechanism)

と

その応用

田屋 英俊

理研iTHEMS

2020/1/21 @ YITP (online)

- Furry描像の摂動論に基づく、動的にアシストされたSchwinger機構の定式化: [HT, PRD 99, 056006 (2018)] [Huang, HT, PRD 100, 016013 (2019)]
- 動的カシミア効果への応用: [HT, PRR 2, 023346 (2020)]
- カイラリティ生成への応用: [HT, PRR 2, 023257 (2020)]
- Strong-field QEDのレビュー: [Fedotov, Ilderton, Karbstein, King, Seipt, HT, Torgrimsson, **3月に出ます**]

今日の話

1. イントロダクション

強い電場による粒子生成、
特に、Schwinger機構と動的にアシストされたSchwinger機構のレビュー

2. 「Furry描像の摂動論」による 動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

3. 2の応用

- ・ 電場だけでなく、いろんな外場に対して使える
⇒ 応用例 1) (荷電有質量粒子に対する) 動的カシミア効果の γ による増幅
- ・ 粒子数 = キャリアが増えるとほかのいろんな量も増大される
⇒ 応用例 2) カイラリティ生成の増大

主なメッセージ

- ・ 技術的なこと: Furry描像の摂動論は、Schwinger機構の物理を解析的に理解する上で非常に強力
- ・ 物理的なこと: 動的にアシストされたSchwinger機構は、
 - 単に粒子生成数を増大させるだけじゃない
例) 振動パターン、有効質量の増大、スピン生成、強電場中の真空構造を色濃く反映
 - そのアイデアはSchwinger機構の文脈を超えていろんなところに使える可能性がある
(しかし正直に言えば、原子核・ハドロンへの応用はあまりできていないので、興味があれば議論していただけると嬉しいです)

Schwinger機構

[Sauter (1932)] [Heisenberg, Euler (1936)]
[Schwinger (1951)]

✓ 真空中に強く遅い電場を当てると、量子トンネルによって粒子対が生成



Schwinger機構

[Sauter (1932)] [Heisenberg, Euler (1936)]
[Schwinger (1951)]

✓ 真空中に強く遅い電場を当てると、量子トンネルによって粒子対が生成



- 電場が十分に遅い ≈ **定常電場のとき**はとてもよくわかっている

$$N_{e^\pm} = \frac{(eE)^2 VT}{(2\pi)^3} \times \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right] \sim \exp[-\# \times (\text{gap height}) \times (\text{gap length})]$$

- 楽しさ

陽に非摂動 ⇒ 場の理論の非摂動的側面を学ぶ良い題材

(cf. 英語版wikiの“Non-perturbative”を見ると最初に出てくる物理的な具体例がSchwinger機構！)

真空の過程 ⇒ 基礎的な重要性。すべての物理過程は真空の上で起こる。

現象論的に楽しい ⇒ 極限状況の物理を理解する上でしばしば大事

(次のスライド)

最近実験が可能になりつつある

類似の現象がいろんな分野で起こる

Schwinger機構はどこで起こり得るか

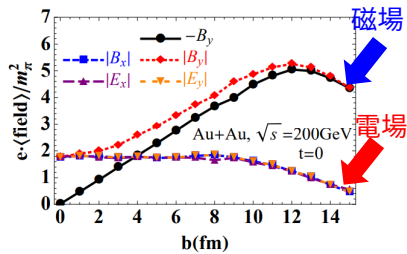
✓ 強い電場 $eE \gtrsim m^2$ があるとき、Schwinger機構は起こり得る $\because N_{e^\pm} \propto \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right]$

Schwinger機構はどこで起こり得るか

✓ 強い電場 $eE \gtrsim m^2$ があるとき、Schwinger機構は起こり得る $\because N_{e^\pm} \propto \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right]$

• 極限状況の物理系: ハドロン・原子核物理での例

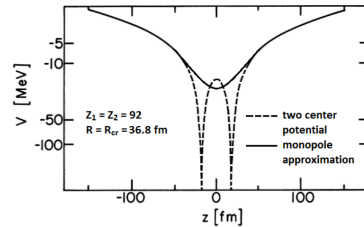
(1) 重イオン衝突の電磁場



[Skokov, Illarionov, Toneev (2009)]
[Deng, Huang (2012)]

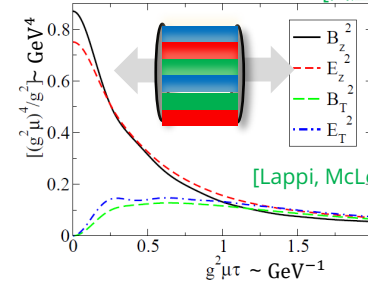
(2) $Z > 173$ の原子核の不安定性

中間エネルギー重イオン衝突でテスト可かも
[Review: Rafelski, et al (2014)] [Maltsev et al (2019)]



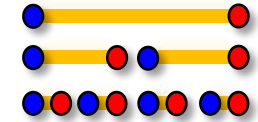
(3) 重イオン衝突でのQGP生成

[田屋の博論]



[Lappi, McLerran (2006)]

(4) String breaking



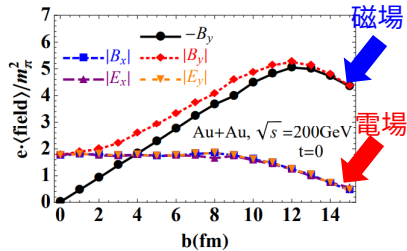
* 最近の実時間シミュレーション:
[Hebenstreit, Berges, Gelfand, (2013)]
[Spitz, Berges, (2019)]
* Lund model:

Schwinger機構はどこで起こり得るか

✓ 強い電場 $eE \gtrsim m^2$ があるとき、Schwinger機構は起こり得る $\because N_{e^\pm} \propto \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right]$

• 極限状況の物理系: ハドロン・原子核物理での例

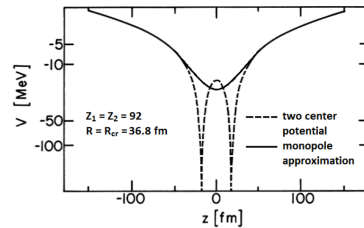
(1) 重イオン衝突の電磁場



[Skokov, Illarionov, Toneev (2009)]
[Deng, Huang (2012)]

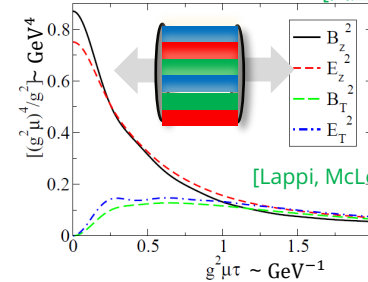
(2) $Z > 173$ の原子核の不安定性

中間エネルギー重イオン衝突でテスト可かも
[Review: Rafelski, et al (2014)] [Maltsev et al (2019)]



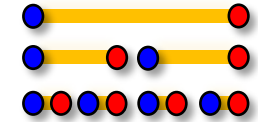
(3) 重イオン衝突でのQGP生成

[田屋の博論]



[Lappi, McLerran (2006)]

(4) String breaking



* 最近の実時間シミュレーション:
[Hebenstreit, Berges, Gelfand, (2013)]
[Spitz, Berges, (2019)]
* Lund model:

• 類似の物理系

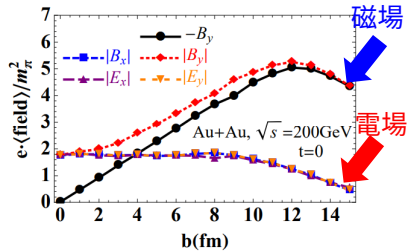
- 物性系の絶縁破壊(Landau-Zener遷移): 半導体、グラフェン、冷却原子系、強相関物質 (e.g., Mott絶縁体)、 ...
- 量子トンネリングなので、核融合/分裂のような原子核物理のトンネル現象等とも相互作用できるはず...
(しかし、あまり交流例を知らないので教えて/議論してください) 核融合への応用 [Queisser, Schutzhold, (2019)]

Schwinger機構はどこで起こり得るか

✓ 強い電場 $eE \gtrsim m^2$ があるとき、Schwinger機構は起こり得る $\because N_{e^\pm} \propto \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right]$

• 極限状況の物理系: ハドロン・原子核物理での例

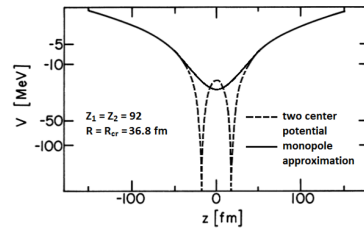
(1) 重イオン衝突の電磁場



[Skokov, Illarionov, Toneev (2009)]
[Deng, Huang (2012)]

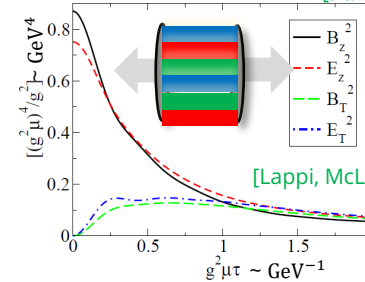
(2) $Z > 173$ の原子核の不安定性

中間エネルギー重イオン衝突でテスト可かも
[Review: Rafelski, et al (2014)] [Maltsev et al (2019)]



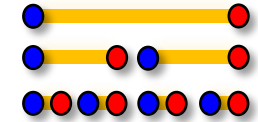
(3) 重イオン衝突でのQGP生成

[田屋の博論]



[Lappi, McLerran (2006)]

(4) String breaking

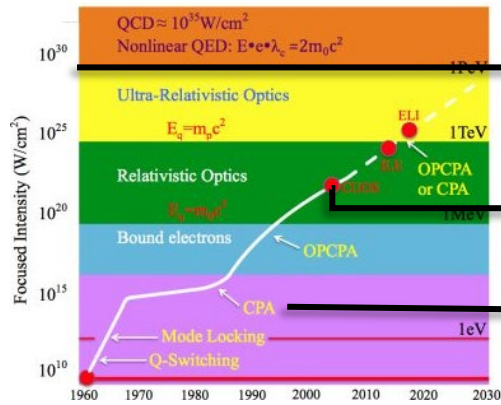


* 最近の実時間シミュレーション:
[Hebenstreit, Berges, Gelfand, (2013)]
[Spitz, Berges, (2019)]
* Lund model:

• 類似の物理系

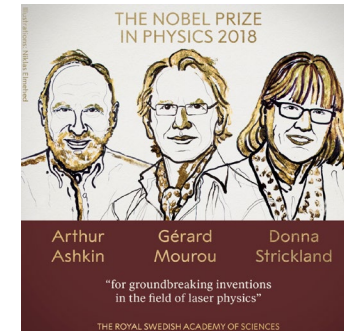
- 物性系の絶縁破壊(Landau-Zener遷移): 半導体、グラフェン、冷却原子系、強相関物質 (e.g., Mott絶縁体)、 ...
- 量子トンネリングなので、核融合/分裂のような原子核物理のトンネル現象等とも相互作用できるはず... (しかし、あまり交流例を知らないなので教えて/議論してください) 核融合への応用 [Queisser, Schutzhold, (2019)]

• 高強度レーザーの発展



Schwinger機構に必要な電場強度
(50年くらいで実現できるかも)

現在最強のレーザー

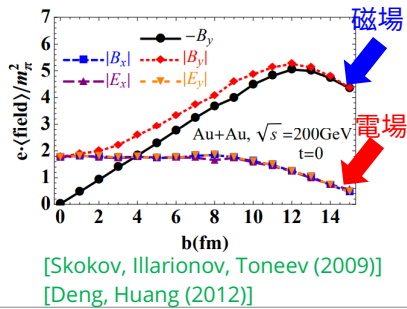


Schwinger機構はどこで起こり得るか

✓ 強い電場 $eE \gtrsim m^2$ があるとき、Schwinger機構は起こり得る $\therefore N_{e^\pm} \propto \exp\left[-\pi \frac{m^2}{eE}\right]$

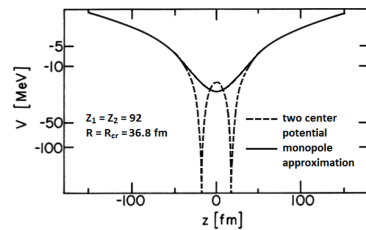
• 極限状況の物理系: ハドロン・原子核物理での例

(1) 重イオン衝突の電磁場



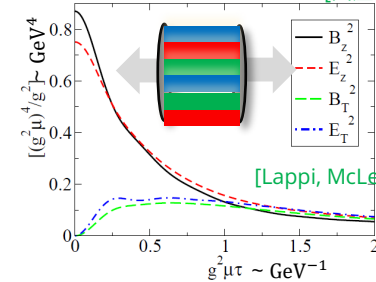
(2) $Z > 173$ の原子核の不安定性

中間エネルギー重イオン衝突でテスト可かも
[Review: Rafelski, et al (2014)] [Maltsev et al (2019)]

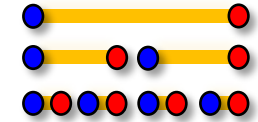


(3) 重イオン衝突でのQGP生成

[田屋の博論]



(4) String breaking

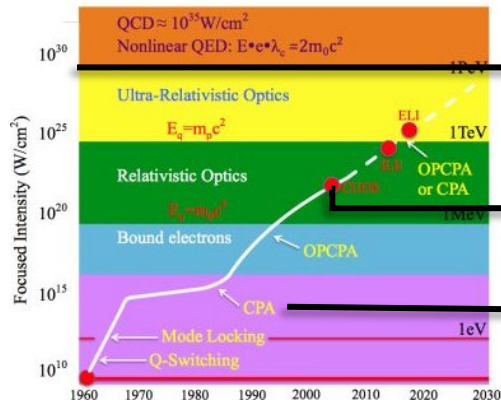


* 最近の実時間シミュレーション:
[Hebenstreit, Berges, Gelfand, (2013)]
[Spitz, Berges, (2019)]
* Lund model:

• 類似の物理系

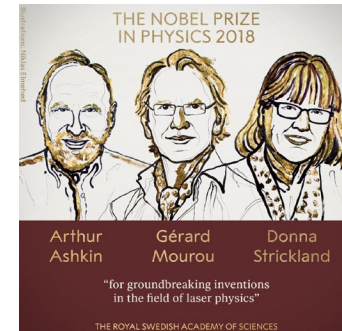
- 物性系の絶縁破壊(Landau-Zener遷移): 半導体、グラフェン、冷却原子系、強相関物質 (e.g., Mott絶縁体)、 ...
- 量子トンネリングなので、核融合/分裂のような原子核物理のトンネル現象等とも相互作用できるはず... (しかし、あまり交流例を知らないので教えて/議論してください) 核融合への応用 [Queisser, Schutzhold, (2019)]

• 高強度レーザーの発展



Schwinger機構に必要な電場強度
(50年くらいで実現できるかも)

現在最強のレーザー

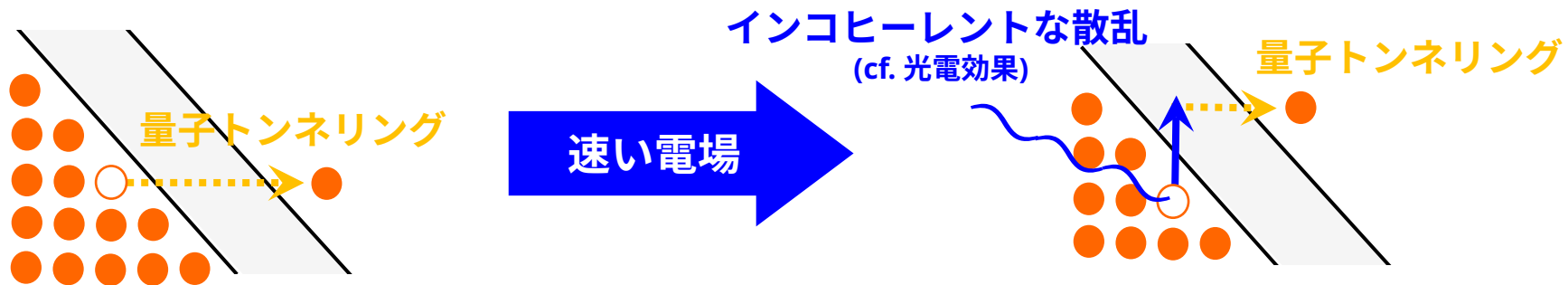


✓ いろいろ議論されているが、(レーザー強度の未熟さゆえに) 実験的な直接検証は未だにない

⇒ 今の実験技術でも検証できるように、Schwinger機構をどうにかして増大できないか？

動的にアシストされたSchwinger機構 (1/2)

- ✓ 強く遅い電場に (弱く)速い電場 を重ねる [Dunne, Gies, Schutzhold (2008), (2009)]



$$N \sim \exp[-\# \times (\text{gap height}) \times (\text{gap length})] \Rightarrow \text{粒子生成の増大}$$

インコヒーレントな散乱で減る

- 半導体物理で知られたFranz-Keldysh効果と等価 [Franz (1958)] [Keldysh (1958)] [HT (2019)]

動的にアシストされたSchwinger機構 (2/2)

✓ 理論的な定式化

動的にアシストされたSchwinger機構 (2/2)

✓ 理論的な定式化

- Dirac方程式が解けるとうれしいが一般的の電場に対しては (解析的には) 解けない
- 先行研究: 半古典近似 = \hbar によるtransseries展開

$$N = \sum_{n,m} N_{n,m} \hbar^n e^{-mS/\hbar} = (N_{0,1} + O(\hbar)) e^{-S/\hbar} + O(e^{-2S/\hbar})$$

- Steepest descent analysis [Brezin, Itzykson (1970)]
- Imaginary-time method [Popov (1972)]
- Divergent asymptotic series method [Berry (1989)]
- Worldline instanton method [Dunne, Shubert (2005)]
- (exact) WKB [HI, Fujimori, Misumi, Nitta, Sakai (2020)]
- ...

$$\Rightarrow \text{電場が十分に遅いとき有効 } \hbar \ll 1 \Leftrightarrow \Omega \ll 1 \quad \because \quad i\hbar\partial_t\psi = H(\Omega t)\psi \xrightarrow{\tau \equiv t/\hbar} i\partial_\tau\psi = H(\hbar\Omega\tau)\psi$$

動的にアシストされたSchwinger機構 (2/2)

✓ 理論的な定式化

- Dirac方程式が解けるとうれしいが一般的の電場に対しては (解析的には) 解けない
- 先行研究: 半古典近似 = \hbar によるtransseries展開

$$N = \sum_{n,m} N_{n,m} \hbar^n e^{-mS/\hbar} = (N_{0,1} + O(\hbar)) e^{-S/\hbar} + O(e^{-2S/\hbar})$$

- Steepest descent analysis [Brezin, Itzykson (1970)]
- Imaginary-time method [Popov (1972)]
- Divergent asymptotic series method [Berry (1989)]
- Worldline instanton method [Dunne, Shubert (2005)]
- (exact) WKB [HI, Fujimori, Misumi, Nitta, Sakai (2020)]
- ...

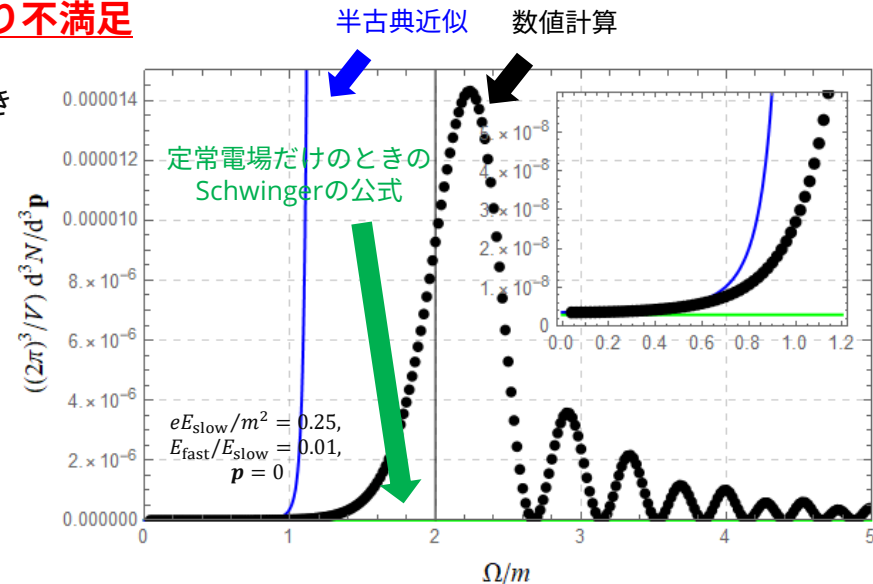
⇒ 電場が十分に遅いとき有効 $\hbar \ll 1 \Leftrightarrow \Omega \ll 1 \quad \therefore \quad i\hbar\partial_t\psi = H(\Omega t)\psi \xrightarrow{\tau \equiv t/\hbar} i\partial_\tau\psi = H(\hbar\Omega\tau)\psi$

- たしかに増大する様子が見えるが、**定量的にかなり不満足**

例) 定常電場(=遅い電場)に $\cos \Omega t$ (=速い電場)を重ねたとき

- 増大が顕著な高周波領域ではぜんぜん合わない
- 単に増大するだけでなく振動もする

⇒ もっと良い解析的手法を開発したい！



今日の話

1. イントロダクション

強い電場による粒子生成、

特に、Schwinger機構と動的にアシストされたSchwinger機構のレビュー

2. Furry描像の摂動論による 動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

3. 2の応用

- 電場だけでなく、いろんな外場に対して使える
 - ⇒ 応用例 1) (荷電有質量粒子に対する) 動的カシミア効果の I による増幅
- 粒子数 = キャリアが増えるとはほかのいろんな量も増大される
 - ⇒ 応用例 2) カイラリティ生成の増大

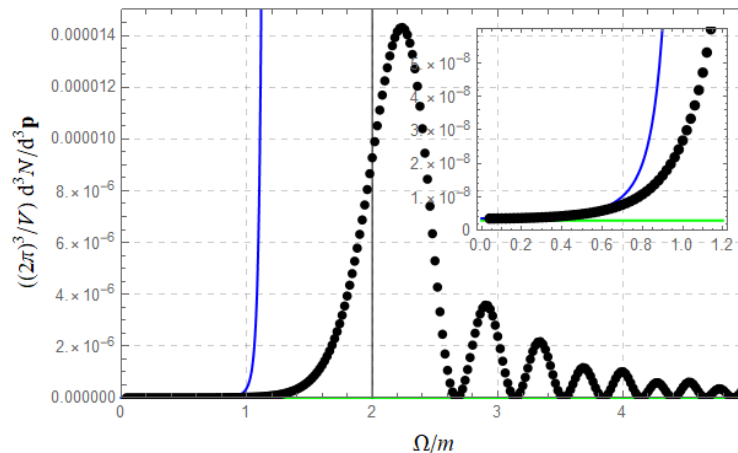
動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

Dirac方程式を速い電場については摂動的に、遅い電場については非摂動的に解くことで、
粒子数 $\frac{d^3 N_s}{dp^3} = \langle \text{vac} | \hat{a}_{p,s}^\dagger \hat{a}_{p,s} | \text{vac} \rangle$ を求める

[Furry (1951)]

⇒ ドレストな波動関数で摂動論をやる (= Furry描像の摂動論と strong-field QEDの分野で呼ばれる)

← その動機は、数値計算の結果から察するに,,,



- 共鳴 ≈ 摂動的ピークがある ⇒ 速い電場は陽に摂動的に扱った方が良さそうな気がする
- しかし、遅い電場は強いので、その効果は非摂動的に扱う必要がある気がする

Furry画像の摂動論による定式化 (1/3)

[HI, (2018)] [Huang, HI (2019)]

STEP 1

電場 E を強く遅い電場 E_S と弱く速い電場 \mathcal{E}_f に分ける

$$E = E_S + \mathcal{E}_f$$

(電場じゃなくても、他の外場でも同じことができる)

Furry画像の摂動論による定式化 (1/3)

[HI, (2018)] [Huang, HI (2019)]

STEP 1

電場 E を強く遅い電場 E_S と弱く速い電場 \mathcal{E}_f に分ける

$$E = E_S + \mathcal{E}_f$$

(電場じゃなくても、他の外場でも同じことができる)

STEP 2

Dirac方程式を E_S について非摂動的に、 \mathcal{E}_f について摂動的に解く

$$[i\partial - eA_S - m]\hat{\psi} = e\mathcal{A}_f\hat{\psi}$$

$$\Rightarrow \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}^{(0)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dy^4 S_R(x, y) e\mathcal{A}_f(y) \hat{\psi}^{(0)}(y) + O(|e\mathcal{A}_f|^2)$$

ここで、 $\hat{\psi}^{(0)}$ と S_R は、 E_S に非摂動的にドレスされている

$$[i\partial - eA_S - m]\hat{\psi}^{(0)} = 0$$

$$[i\partial - eA_S - m]S_R(x, y) = \delta^4(x - y)$$

Furry画像の摂動論による定式化 (2/3)

STEP 3

in/outでの消滅演算子 $\hat{a}_{p,s}^{\text{in/out}}$, $\hat{b}_{p,s}^{\text{in/out}}$ を場 $\hat{\psi}$ から定義する

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{p,s}^{\text{in/out}} \\ \hat{b}_{-p,s}^{\text{in/out}\dagger} \end{pmatrix} \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty / +\infty} \int d^3x \begin{pmatrix} (u_{p,s} e^{-i\omega_p t} e^{ip \cdot x})^\dagger \\ (v_{p,s} e^{+i\omega_p t} e^{ip \cdot x})^\dagger \end{pmatrix} \hat{\psi}(x)$$

Furry画像の摂動論による定式化 (2/3)

STEP 3

in/outでの消滅演算子 $\hat{a}_{p,s}^{\text{in/out}}$, $\hat{b}_{p,s}^{\text{in/out}}$ を場 $\hat{\psi}$ から定義する

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{p,s}^{\text{in/out}} \\ \hat{b}_{-p,s}^{\text{in/out}\dagger} \end{pmatrix} \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty / +\infty} \int d^3x \begin{pmatrix} (u_{p,s} e^{-i\omega_p t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})^\dagger \\ (v_{p,s} e^{+i\omega_p t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})^\dagger \end{pmatrix} \hat{\psi}(x)$$

⇒ in/outの演算子は同じでない $\hat{a}_{p,s}^{\text{in}} \neq \hat{a}_{p,s}^{\text{out}}$ 。Bogoliubov変換で結びつく。

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{p,s}^{\text{out}} \\ \hat{b}_{-p,s}^{\text{out}\dagger} \end{pmatrix} = \sum_{s'} \int d^3p' \begin{pmatrix} \alpha_{p,s;p',s'} & \beta_{p,s;p',s'} \\ -\beta_{p,s;p',s'}^* & \alpha_{p,s;p',s'}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{p',s'}^{\text{in}} \\ \hat{b}_{-p',s'}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix}$$

Bogoliubov係数は、 $e\mathcal{A}_f$ のLOで、

$$\begin{aligned} \alpha_{p,s;p',s'} &= \int d^3x \left(\psi_{p,s}^{(0)\text{out}\dagger} + \psi_{p',s'}^{(0)\text{in}} - i \int d^4x \left(\bar{\psi}_{p,s}^{(0)\text{out}} e\mathcal{A}_f + \psi_{p',s'}^{(0)\text{in}} \right) \right) + O(|e\mathcal{A}_f|^2) \\ \beta_{p,s;p',s'} &= \int d^3x \left(-\psi_{p,s}^{(0)\text{out}\dagger} + \psi_{p',s'}^{(0)\text{in}} - i \int d^4x \left(-\bar{\psi}_{p,s}^{(0)\text{out}} e\mathcal{A}_f + \psi_{p',s'}^{(0)\text{in}} \right) \right) + O(|e\mathcal{A}_f|^2) \end{aligned}$$

ここで、 $\pm\psi_{p,s}^{(0)\text{in/out}}$ は $e\mathcal{A}_s$ にフルにドレスされた解

$$[i\partial - e\mathcal{A}_s - m] \pm\psi_{p,s}^{(0)\text{in/out}} = 0 \quad \text{w/} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty / +\infty} \begin{pmatrix} +\psi_{p,s}^{(0)\text{in/out}} \\ -\psi_{p,s}^{(0)\text{in/out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{p,s} e^{-i\omega_p t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \\ v_{p,s} e^{-i\omega_p t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

Furry画像の摂動論による定式化 (3/3)

STEP 4

数演算子の期待値を評価する

$$\frac{d^3 N_e}{d\mathbf{p}^3} \equiv \langle \text{vac}; \text{in} | a_{\mathbf{p},s}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{p},s}^{\text{out}} | \text{vac}; \text{in} \rangle = \sum_{s'} \int d^3 \mathbf{p}' |\beta_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}|^2$$

興味ある状況: E_s 十分遅い \approx 定常電場と近似してよい

\Rightarrow Dirac方程式は解析的に解けるので $\pm \psi_{\mathbf{p},s}^{(0)\text{in/out}}$ は知っている

$\Rightarrow \beta_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}$ は厳密に計算できる

Furry画像の摂動論による定式化 (3/3)

STEP 4

数演算子の期待値を評価する

$$\frac{d^3 N_e}{d\mathbf{p}^3} \equiv \langle \text{vac}; \text{in} | a_{\mathbf{p},s}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{p},s}^{\text{out}} | \text{vac}; \text{in} \rangle = \sum_{s'} \int d^3 \mathbf{p}' |\beta_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}|^2$$

興味ある状況: E_s 十分遅い \approx 定常電場と近似してよい

\Rightarrow Dirac方程式は解析的に解けるので $\pm \psi_{\mathbf{p},s}^{(0)\text{in/out}}$ は知っている

$\Rightarrow \beta_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}$ は厳密に計算できる

✓ コメント

- 数演算子の期待値を直接計算している
 \Rightarrow **inclusive**な量で ϵ_f にLOの過程をすべて含む

$$\langle \text{vac}; \text{in} | a_{\mathbf{p},s}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{p},s}^{\text{out}} | \text{vac}; \text{in} \rangle = \sum_X |\langle e_{\mathbf{p},s} X; \text{out} | \text{vac}; \text{in} \rangle|^2 \quad [\text{Baltz, McLerran (2001)}]$$

$$= \sum_X \left| \left\{ \begin{array}{c} \text{Feynman diagram} \\ \text{with } X \text{ particles} \end{array} \right\} \right|_{X;\text{out}}^2 = \left| \begin{array}{c} \text{Schwinger} \\ \text{diagram} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \text{multiple} \\ \text{Schwinger} \\ \text{diagram} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \text{Breit-Wheeler} \\ \text{diagram} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \text{Schwinger} \\ \text{+ absorption} \\ \text{diagram} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{c} \text{Schwinger} \\ \text{+ annihilation} \\ \text{diagram} \end{array} \right|^2 + \dots$$

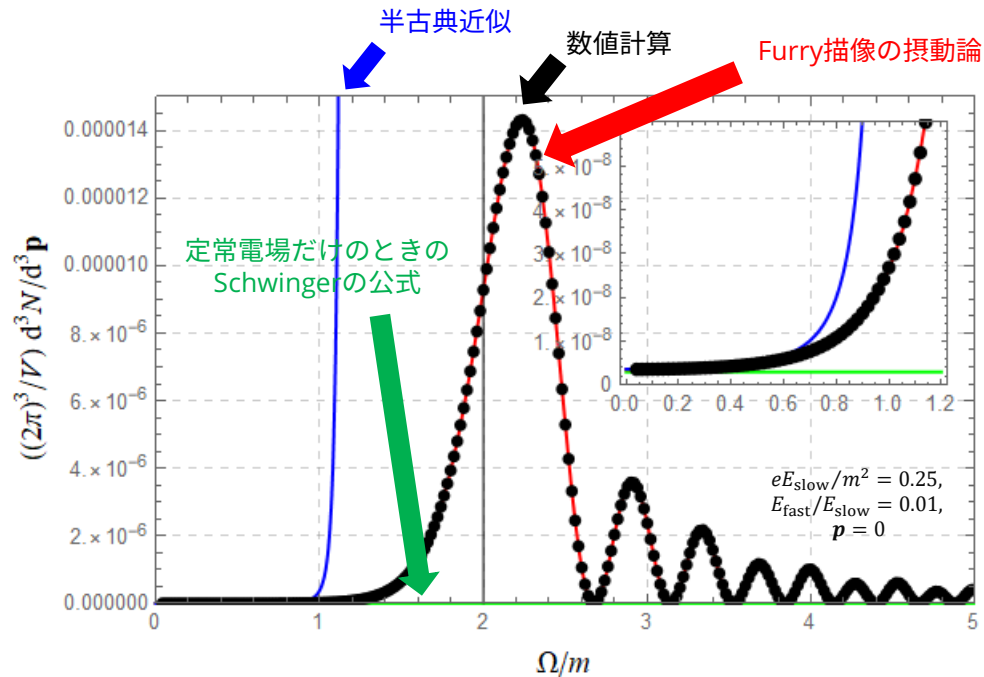
- 粒子生成数 \neq 真空崩壊率 [Cohen McGady (2008)]
- $\pm \psi_{\mathbf{p},s}^{(0)\text{in/out}}$ の厳密解を知らない場合は、WKB波動関数を使って近似的な評価ができたりする
- 数値的評価が難しい、速い電場が時空間に依存する場合も解析評価可能

どれくらい良い 定式化になっているのか？

具体的な計算結果を紹介

計算結果 (1/2)

✓ 平行に重ね合わせたとき $E = (0, 0, E_{\text{slow}} + \mathcal{E}_{\text{fast}} \cos \Omega t)$



• 数値計算と非常によく合う。Furry描像摂動論は非常に強力。

⇒ 物理的な教訓: 強い場によってドレスされた1光子過程こそが動的にアシストされたSchwinger機構の本質

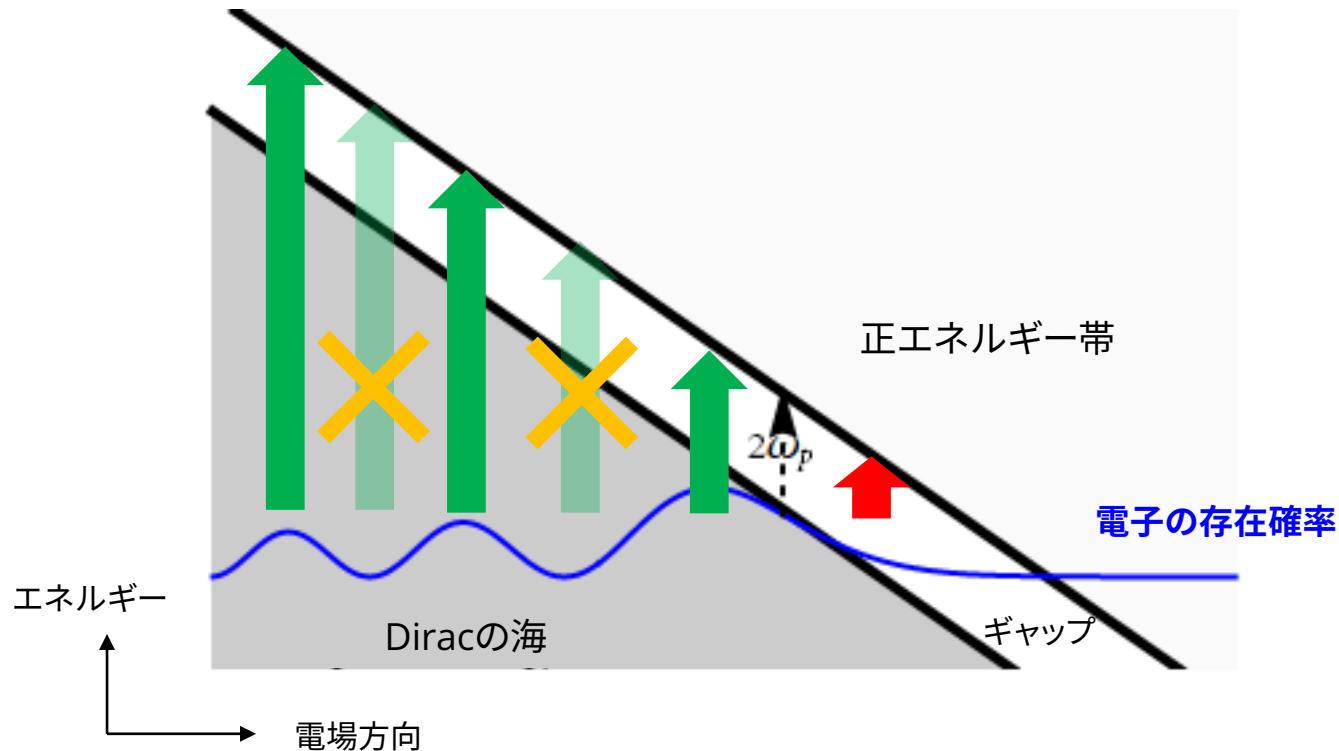
• 動的にアシストされたSchwinger機構は単に粒子数を増大するだけじゃない

- 1光子過程のピークが上にズれる $\Omega > 2m \approx$ 定常電場中での電子の有効質量の増加
- 高周波領域で振動パターンが出る

cf) 振動電場中の
Pondermotive energy

← バンド描像によって直感的に理解できる (次のスライド)

バンド描像による理解



- 量子トンネリング ⇒ **粒子生成の増大**
- 量子反射 ⇒ **粒子生成の振動**

動的にアシストされたSchwinger機構での生成粒子スペクトルは、強い電場中のQED真空(Diracの海)の構造を直接反映する

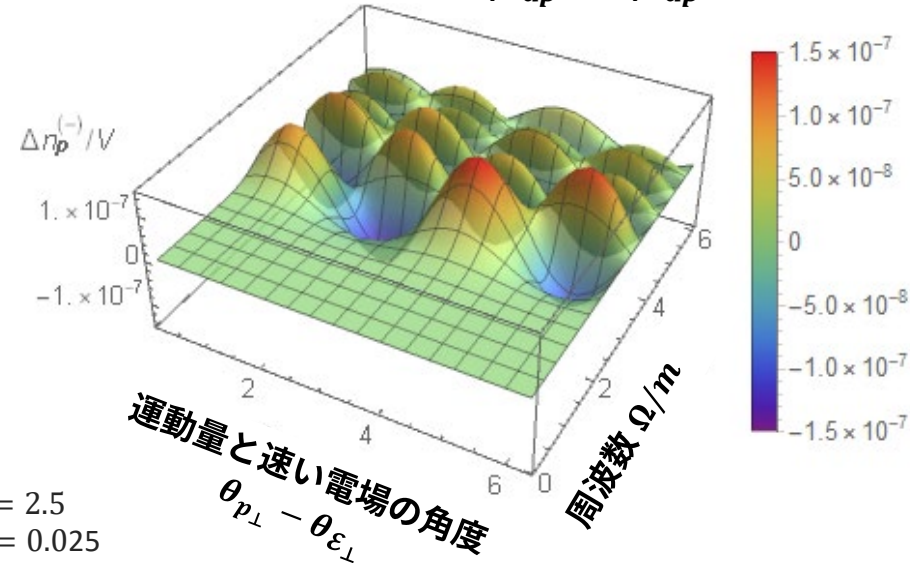
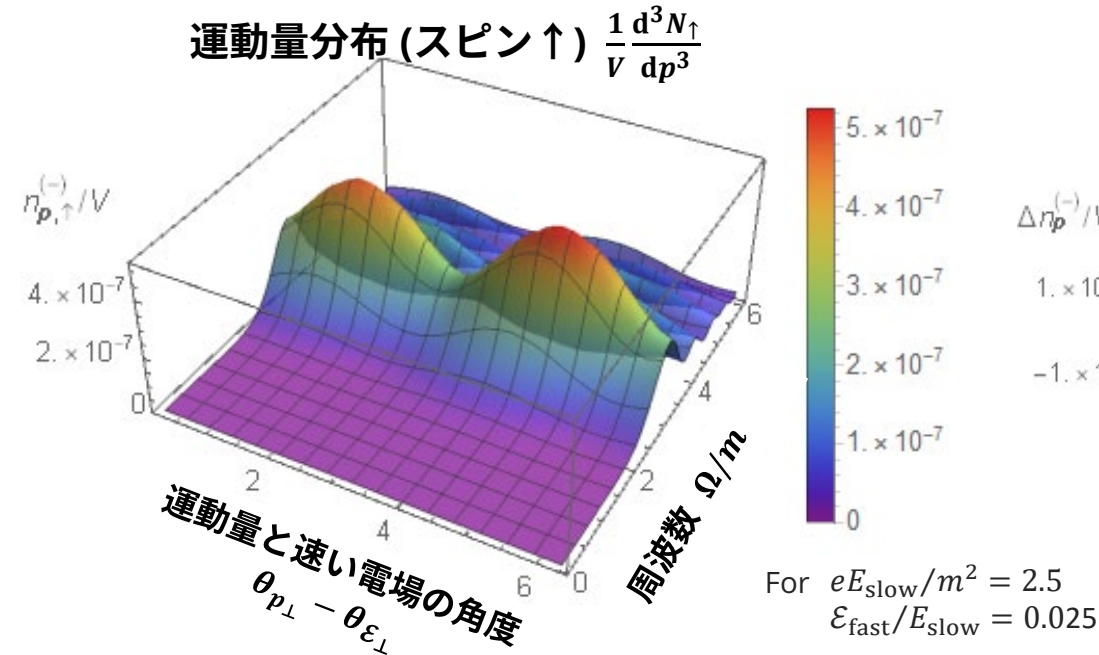
計算結果 (2/2)

✓ 重ね合わせが平行ではないとき

$$E = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\text{fast}} \cos \Omega t \times \cos \theta_{\mathcal{E}\perp} \\ \mathcal{E}_{\text{fast}} \cos \Omega t \times \sin \theta_{\mathcal{E}\perp} \\ E_{\text{slow}} \end{pmatrix}$$

運動量分布 (スピン↑) $\frac{1}{V} \frac{d^3 N_{\uparrow}}{dp^3}$

スピン↑と↓の差 $\frac{1}{V} \frac{d^3 N_{\uparrow}}{dp^3} - \frac{1}{V} \frac{d^3 N_{\downarrow}}{dp^3}$



- 技術的なこと:
 - 数値計算はプロットしていないが、かなりよく合う
 - 直線偏光でない電場の、半古典近似の計算は (低周波領域ですら) 実は完全に確立していない
 - 素朴な半古典近似の公式は適用できないことが cf) 幾何学的位相効果 [Takayoshi, Wu, Oka, (2021)]
 - 物性物理で議論されている [Kitamura, Nagaosa, Morimoto, (2019)]
- 物理的なこと:
 - 平行の重ね合わせと比べ、増大・振動の様子に本質的な違いはない
 - スピン軌道相互作用 $\propto \mathbf{s} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\mathcal{E}})$ のために、スピン依存性や角度依存性が出る
- 妄想: ひょっとしたら、重イオン衝突の物理なんかにも使えるかも 例) グラズマ中のジェットの伝搬

今日の話

1. イントロダクション

強い電場による粒子生成、

特に、Schwinger機構と動的にアシストされたSchwinger機構のレビュー

2. Furry描像の摂動論による 動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

3. 2の応用

- 電場だけでなく、いろんな外場に対して使える
 - ⇒ 応用例 1) (荷電有質量粒子に対する) 動的カシミア効果の I による増幅
- 粒子数 = キャリアが増えるとはほかのいろんな量も増大される
 - ⇒ 応用例 2) カイラリティ生成の増大

今日の話

1. イントロダクション

強い電場による粒子生成、

特に、Schwinger機構と動的にアシストされたSchwinger機構のレビュー

2. Furry描像の摂動論による 動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

- **技術的なこと:** Furry描像の摂動論は、Schwinger機構の物理を解析的に理解する上で非常に強力
従来の方法(半古典近似)では不満足だった高周波領域や非直線偏光電場もとても正確に記述
- **物理的なこと:** 動的にアシストされたSchwinger機構は、単に粒子生成数を増大させるだけじゃない
振動パターン、有効質量の増大、スピン生成、強電場中の真空構造を色濃く反映

[[HT](#), PRD 99, 056006 (2018)] [[Huang](#), [HT](#), PRD 100, 016013 (2019)]

今日の話

1. イントロダクション

強い電場による粒子生成、

特に、Schwinger機構と動的にアシストされたSchwinger機構のレビュー

2. Furry描像の摂動論による 動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

3. 2の応用

- 電場だけでなく、いろんな外場に対して使える
 - ⇒ 応用例 1) (荷電有質量粒子に対する) 動的カシミア効果の I による増幅
- 粒子数 = キャリアが増えるとほかのいろんな量も増大される
 - ⇒ 応用例 2) カイラリティ生成の増大

動的にアシストされたSchwinger機構の応用

✓ ここ最近、速い電場以外による増幅や、応用的な研究が議論され出した

- 熱的光子によるSchwinger機構の増大 [Torgrimsson, (2019)]
- アクシオン場によるSchwinger機構の増大 [Domcke, Ema, Mukaida, (2021)]
- 核融合への応用 [Queisser, Schutzhold, (2019)]

✓ 今日は、田屋の研究を紹介する

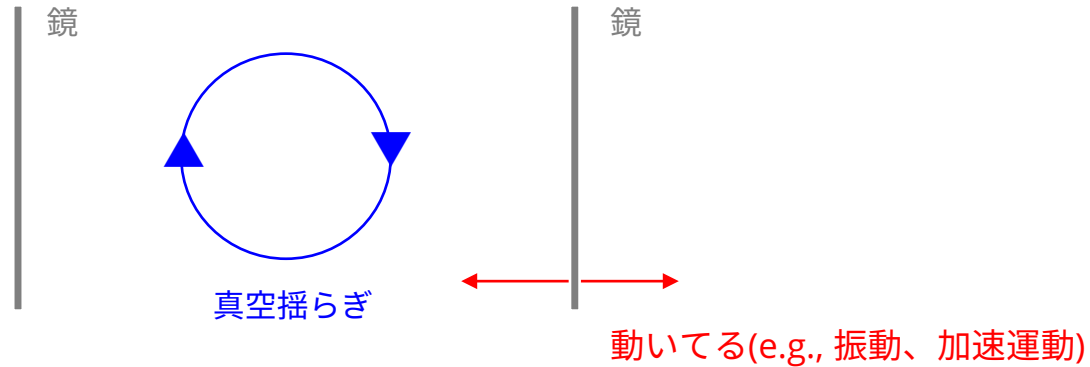
- 電場だけでなく、いろんな外場に対して使える
 - ⇒ 応用例 1) (荷電有質量粒子に対する) 動的カシミア効果の I による増幅 [HT, (2020)]
- 粒子数 = キャリアが増えるとほかのいろんな量も増大される
 - ⇒ 応用例 2) カイラリティ生成の増大 [HT, (2020)]
- 直線偏光電場でないときはスピン依存する
 - ⇒ 応用例 3) Dirac物質や半導体でのスピン流生成 [Huang, Matsuo, HT, (2019)]

動的カシミア効果

[Moore, (1970)]

✓ 境界が速く動くと粒子生成 (オリジナルな予言は光子生成だが、原理的にはなんでも良い)

- 境界の振動数が、1粒子エネルギー(x2)にマッチしたときに摂動的(=共鳴的に)に粒子生成

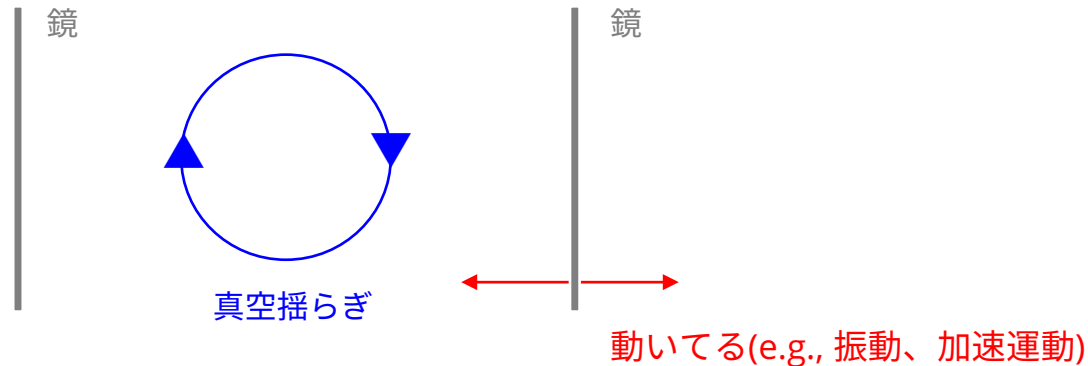


動的カシミア効果

[Moore, (1970)]

✓ 境界が速く動くと粒子生成 (オリジナルな予言は光子生成だが、原理的にはなんでも良い)

- 境界の振動数が、1粒子エネルギー(x2)にマッチしたときに摂動的(=共鳴的に)に粒子生成



- 実はまだ直接の実験的観測はない

- マクロな鏡を早く動かすのはとても大変 例) 典型的なcavity光子生成: 10 GHz

現在の限界: 6 GHz [O'Connell et al., (2010)]

- "アナログ系"での観測がここ10年で初めて行われた

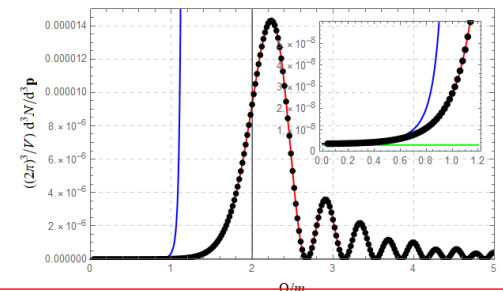
超伝導量子回路 [Wilson et al., (2011)]

メタマテリアル [Lahteenmaki et al., (2013)]

光ファイバー [Vezzoli et al., (2019)]

Q: thresholdを下げるような物理機構は？

⇒ 主張: 荷電粒子なら、動的にアシストされた
Schwinger機構が使える



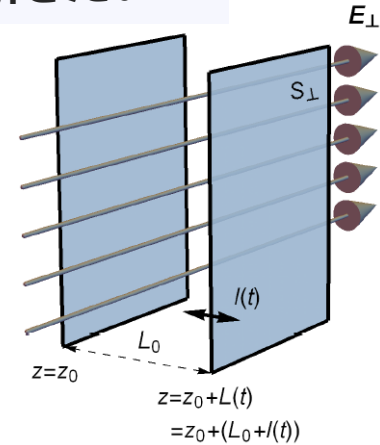
さっきと同じくFurry描像の摂動論で定式化

SETUP: 時間依存する境界条件と電場の下、スカラー場の方程式を解きたい

$$\left[\partial_t^2 - \left(\partial_{\perp} - ie \int^t dt' \mathbf{E}(t') \right)^2 - \partial_z^2 + m^2 \right] \hat{\phi} = 0$$

$$\text{with } \hat{\phi}(z=0) = \hat{\phi}(z=L(t)) = 0$$

$= L_0 + l(t)$



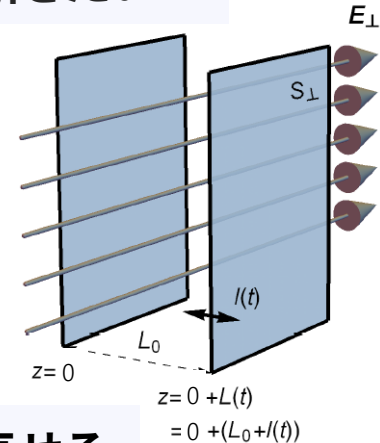
さっきと同じくFurry描像の摂動論で定式化

SETUP: 時間依存する境界条件と電場の下、スカラー場の方程式を解きたい

$$\left[\partial_t^2 - \left(\partial_\perp - ie \int^t dt' E(t') \right)^2 - \partial_z^2 + m^2 \right] \hat{\phi} = 0$$

$$\text{with } \hat{\phi}(z=0) = \hat{\phi}(z=L(t)) = 0$$

$$= L_0 + l(t)$$



STEP 1: 変数変換すると、時間依存境界条件をポテンシャルに書き直せる

$$\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tau(t, z) \\ \xi(t, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ z/L(t) \end{pmatrix}$$

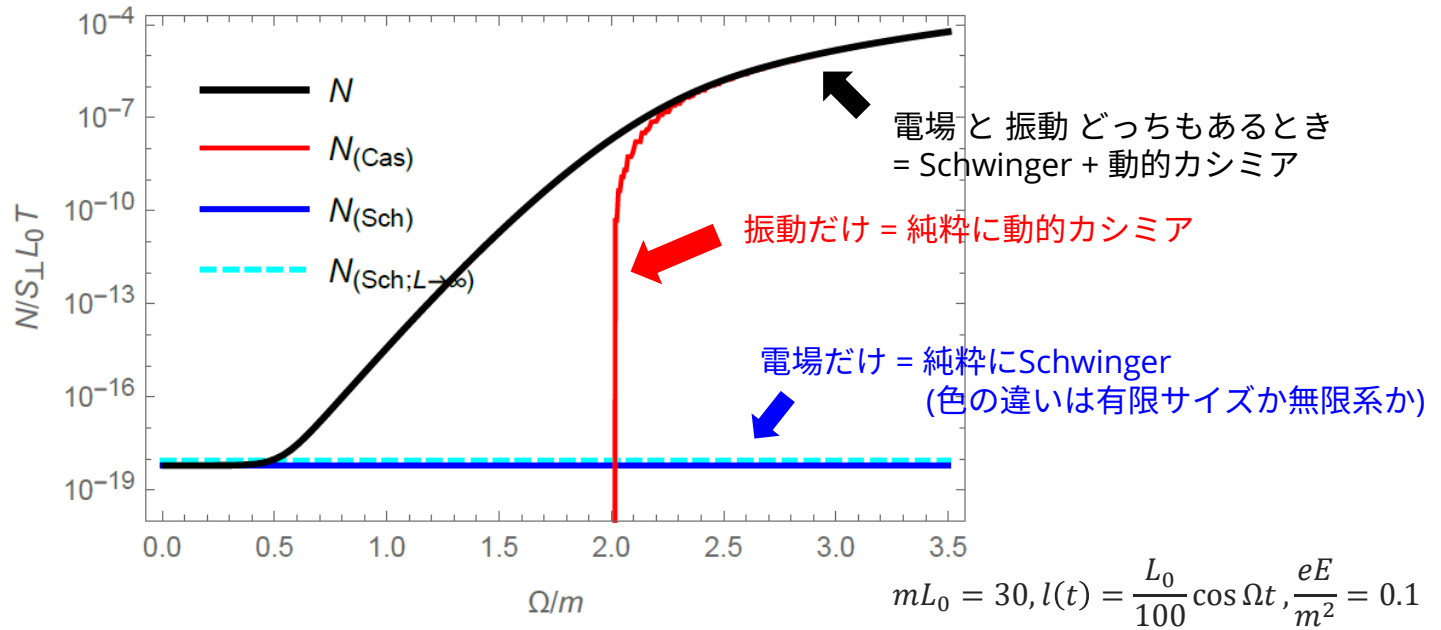
$$\Rightarrow \left[\partial_\tau^2 - \left(\partial_\perp - ie \int^t dt' E(t') \right)^2 - \left(\frac{1}{L_0} \partial_\xi \right)^2 + m^2 \right] \hat{\phi} = V \hat{\phi}$$

$$\text{ここで、 } V = \left(\frac{\ddot{l}}{L_0} + 2 \frac{\dot{l}}{L_0} \partial_\tau \right) \xi \partial_\xi - 2 \frac{l}{L_0} \left(\frac{1}{L_0} \partial_\xi \right)^2 + O \left(\left(\frac{l}{L_0} \right)^2 \right)$$

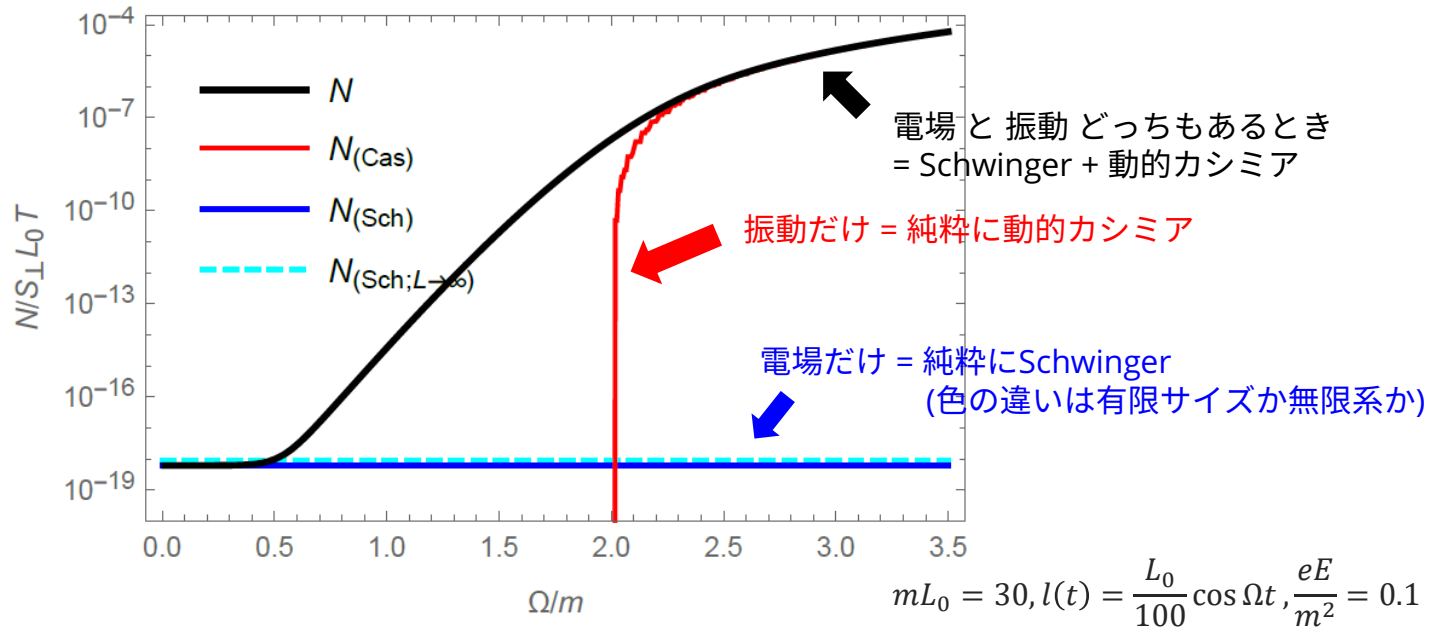
$$\hat{\phi}(\xi=0) = \hat{\phi}(\xi=1) = 0$$

STEP 2: Furry描像の摂動論: 電場 E は非摂動的、ポテンシャル V は摂動的

結果: 全粒子数 $N = \int dp^3 d^3 N/dp^3$ [HT, (2020)]



結果: 全粒子数 $N = \int dp^3 d^3 N/dp^3$ [HT, (2020)]



✓ 解釈: **動的カシミア効果** が **Schwinger機構** によって増大

⇒ threshold $\Omega = 2m$ よりも低いところでも粒子生成が起きる

✓ 逆の解釈: **Schwinger機構** が **動的カシミア効果** によって増大

- ⇒
- $\Omega \neq 0$ での粒子生成は、素朴なSchwinger機構の粒子生成よりも多い
 - 有限サイズ効果で質量が大きくなるが、振動によるエネルギー供給はそれを凌駕
 - (全粒子数 N は、運動量積分のために高周波領域での振動がなめされる)

⇒ 荷電粒子なら、**Schwinger機構と動的カシミアは相互に粒子生成を増大させ得る**

次の応用例

カイラリティ生成の増大

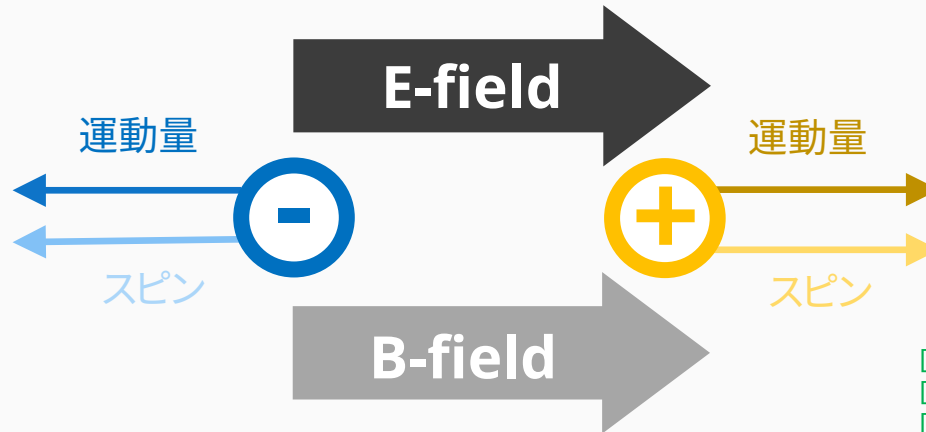
カイラリティ生成

✓ $E \cdot B \neq 0$ のとき非ゼロのカイラリティが生成される(カイラル量子異常)

カイラリティ生成

✓ $E \cdot B \neq 0$ のとき非ゼロのカイラリティが生成される(カイラル量子異常)

- ・ 微視的には、電場による粒子生成と磁場によるランダウ量子化



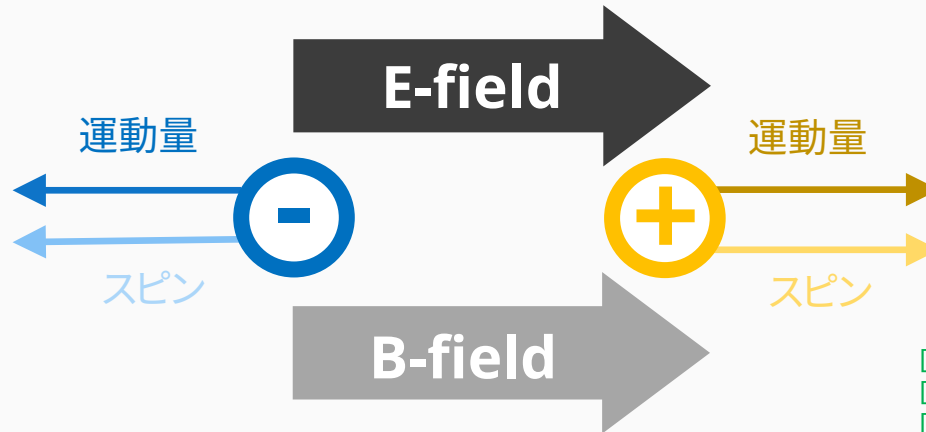
[Nielsen, Ninomiya (1983)]
[Tanji (2010)]
[Fukushima, Kharzeev, Warringa (2010)]
[Copinger, Fukushima, Pu (2018)]
etc ...

⇒ カイラリティ \approx ヘリシティ = $+2 \times N_{\text{pair in LLL}}$

カイラリティ生成

✓ $E \cdot B \neq 0$ のとき非ゼロのカイラリティが生成される(カイラル量子異常)

- ・ 微視的には、電場による粒子生成と磁場によるランダウ量子化



[Nielsen, Ninomiya (1983)]
[Tanji (2010)]
[Fukushima, Kharzeev, Warringa (2010)]
[Copinger, Fukushima, Pu (2018)]
etc ...

⇒ カイラリティ \approx ヘリシティ = $+2 \times N_{\text{pair in LLL}}$

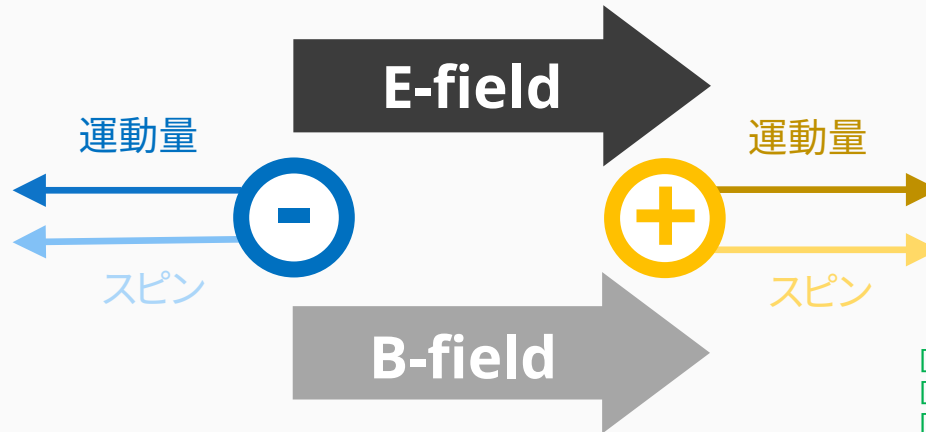
✓ しかし、普通は指数関数的に抑制されていて、実験的に見づらい

- ・ 電場が十分に遅いと思えば、粒子生成はSchwinger機構が駆動する $N_{\text{pair in LLL}} \propto e^{-\# m^2 / eE}$

カイラリティ生成

✓ $E \cdot B \neq 0$ のとき非ゼロのカイラリティが生成される(カイラル量子異常)

- ・ 微視的には、電場による粒子生成と磁場によるランダウ量子化



[Nielsen, Ninomiya (1983)]
[Tanji (2010)]
[Fukushima, Kharzeev, Warringa (2010)]
[Copinger, Fukushima, Pu (2018)]
etc ...

⇒ カイラリティ \approx ヘリシティ = $+2 \times N_{\text{pair in LLL}}$

✓ しかし、普通は指数関数的に抑制されていて、実験的に見づらい

- ・ 電場が十分に遅いと思えば、粒子生成はSchwinger機構が駆動する $N_{\text{pair in LLL}} \propto e^{-\# m^2 / eE}$

**Q: カイラリティ生成を、実験的によりよく理解するために、
どうにかして指数関数的抑制を取っ払えないか？**

⇒ 提案 1) 高周波電場(Floquet系)を利用する [Fukushima, Hidaka, Shimazaki, [HT](#), in preparation]

提案 2) 動的にアシストされたSchwinger機構を利用する [[HT](#), (2020)]

Furry描像の摂動論で定式化

- ✓ $E||B$ の場合に拡張して、2点関数を計算 (基本的にやることは全く同じ)

Furry画像の摂動論で定式化

✓ $E||B$ の場合に拡張して、2点関数を計算 (基本的にやることは全く同じ)

SETUP: 強く遅い平行電磁場 \bar{E}, \bar{B} に弱く速い電場 \mathcal{E} を加える

$$E(t) = \bar{E} + \mathcal{E}(t)$$

$$B(t) = \bar{B}$$

STEP 1: Dirac方程式を、 \bar{E}, \bar{B} について非摂動的に、 \mathcal{E} について摂動的に解く

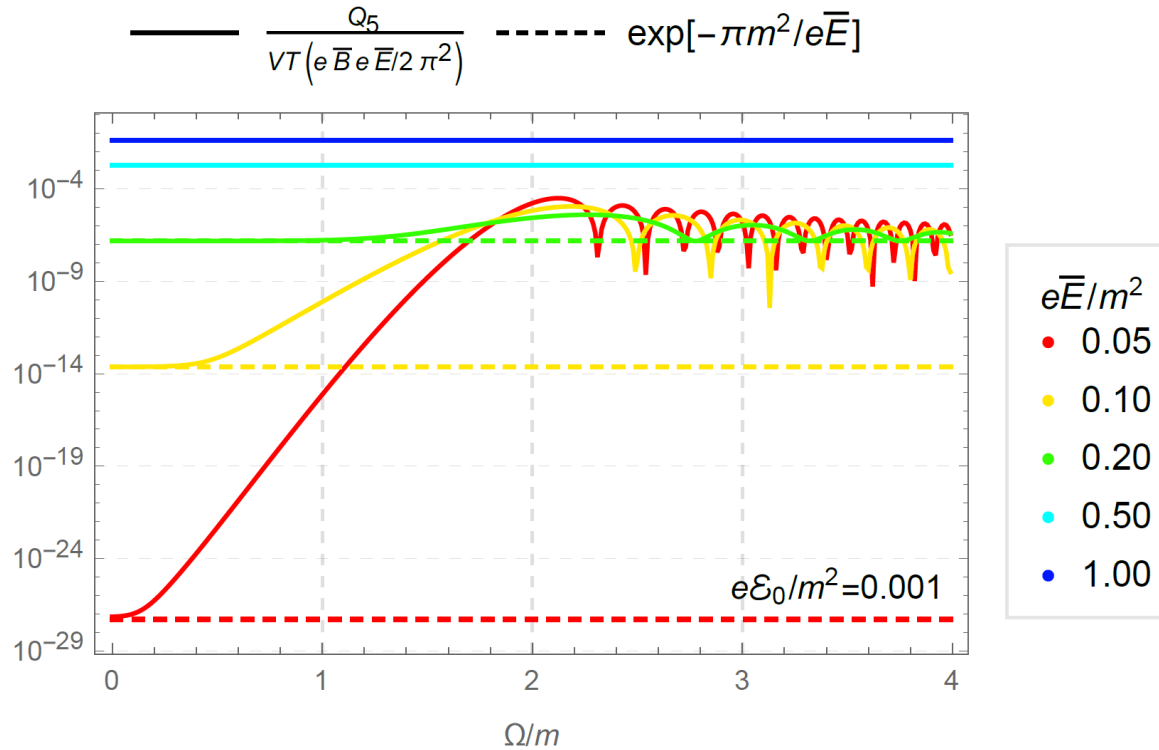
$$[i\partial - e\bar{A} - m]\hat{\psi} = e\mathcal{A}\hat{\psi}$$

$$\Rightarrow \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}^{(0)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dy^4 S_R(x, y) e\mathcal{A}(y) \hat{\psi}^{(0)}(y) + O(|e\mathcal{A}|^2)$$

STEP 2: カイラリティ演算子の真空期待値を計算

$$Q_5 \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \int dx^3 \left\langle \text{vac}; \text{in} \left| \hat{\psi} \gamma^5 \hat{\psi} \right| \text{vac}; \text{in} \right\rangle = O(1) + O(|e\mathcal{A}|^1) + O(|e\mathcal{A}|^2) + \dots$$

結果: カイラル電荷Q5のプロット

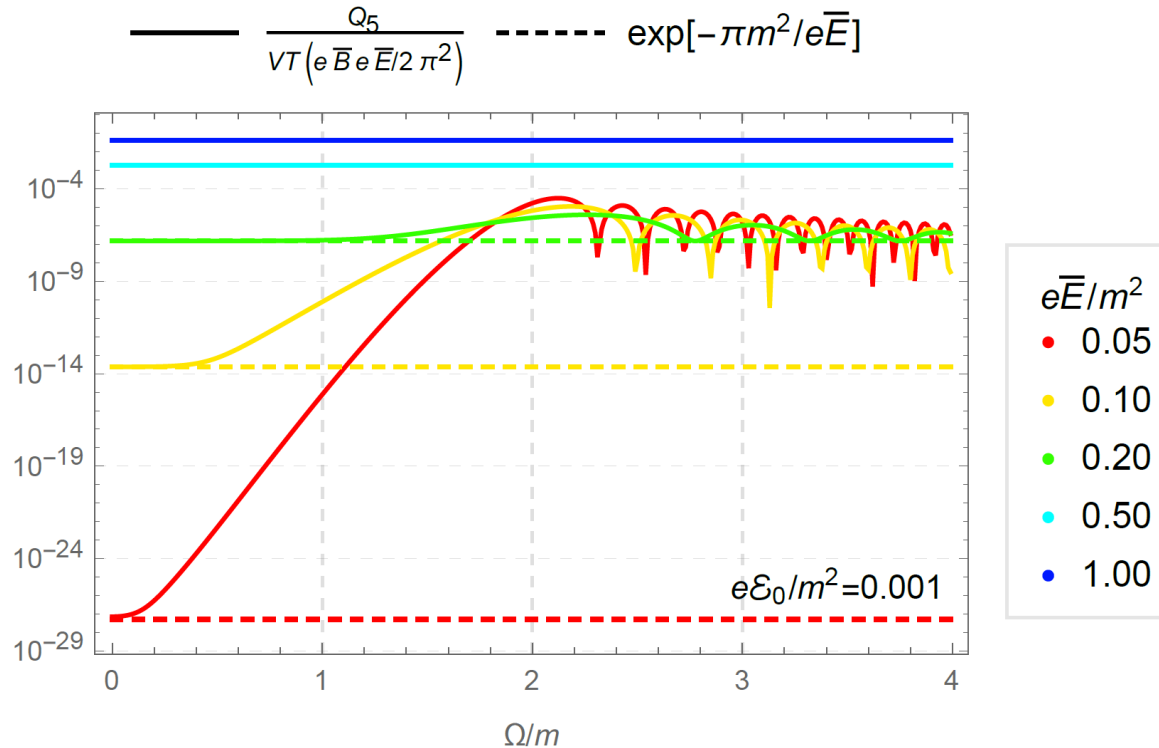


✓ セットアップ: $\frac{eE(t)}{m^2} = \frac{e\bar{E}}{m^2} + 0.001 \cos \Omega t$, $\frac{eB(t)}{m^2} = \frac{e\bar{B}}{m^2}$

• 磁場の大きさは関係ない ← 磁場はエネルギーを供給しないので、粒子生成を変えない

(正確には、Landau量子化で位相体積 $d^3p \propto eB$ が変化する分の増大はあるが、それは図では既に割ってある)

結果: カイラル電荷Q5のプロット



✓ セットアップ: $\frac{eE(t)}{m^2} = \frac{e\bar{E}}{m^2} + 0.001 \cos \Omega t$, $\frac{eB(t)}{m^2} = \frac{e\bar{B}}{m^2}$

• 磁場の大きさは関係ない ← 磁場はエネルギーを供給しないので、粒子生成を変えない

(正確には、Landau量子化で位相体積 $d^3p \propto eB$ が変化する分の増大はあるが、それは図では既に割ってある)

✓ たしかにカイラリティ生成は増大する

• カイラリティ = $+2 \times N_{\text{pair in LLL}}$ なので、粒子数分布に対する増大・振動と同じ振舞い

• ちなみに増大は $m \rightarrow 0$ のときに消える \Rightarrow この機構はmassiveのときだけ意味がある
 \Leftarrow masslessだとSchwingerの公式 $N_{\text{pair in LLL}} \propto e^{-\# m^2/eE} \rightarrow 1$ によって粒子生成がサチってるから

今日の話

1. イントロダクション

強い電場による粒子生成、

特に、Schwinger機構と動的にアシストされたSchwinger機構のレビュー

2. Furry描像の摂動論による 動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

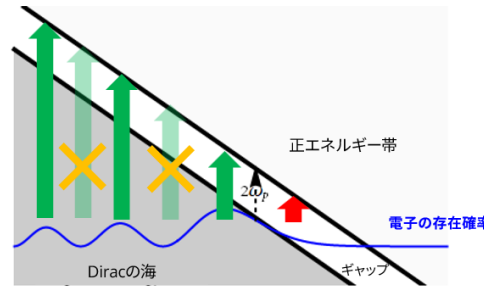
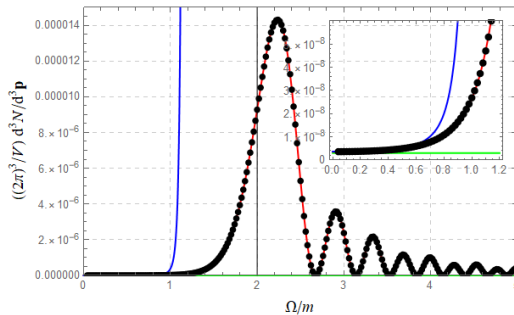
3. 2の応用

- 電場だけでなく、いろんな外場に対して使える
 - ⇒ 応用例 1) (荷電有質量粒子に対する) 動的カシミア効果の I による増幅
- 粒子数 = キャリアが増えるとはほかのいろんな量も増大される
 - ⇒ 応用例 2) カイラリティ生成の増大

まとめ

✓ Furry描像の摂動論による動的にアシストされたSchwinger機構の定式化

- 技術的なこと: Furry描像の摂動論は、Schwinger機構の物理を解析的に理解する上で非常に強力
- 物理的なこと: 動的にアシストされたSchwinger機構は、単に粒子生成数を増大させるだけじゃない
⇒ 振動パターン、有効質量の増大、スピン生成、強電場中の真空構造を色濃く反映



[[HT](#), PRD 99, 056006 (2018)]
[[Huang](#), [HT](#), PRD 100, 016013 (2019)]

✓ その応用

- そのアイデアはSchwinger機構の文脈を超えて
いろんなところに使える可能性がある

(しかし正直に言えば、原子核・ハドロンへの応用はあまりできていないので、興味があれば議論していただけると嬉しいです)

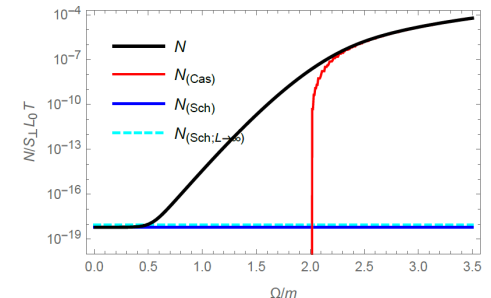
- 電場だけでなくいろんな外場に対して使える

⇒ 応用例 1) (荷電有質量粒子に対する) 動的カシミア効果

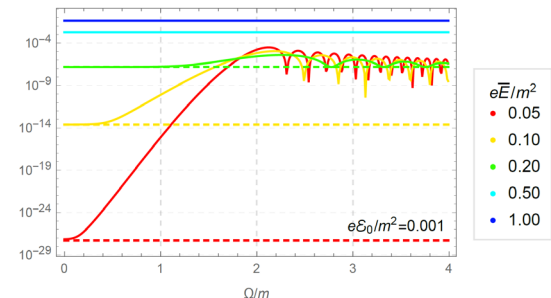
[[HT](#), PRR 2, 023346 (2020)]

- 粒子数 = キャリアが増えるとほかのいろんな量も増大される

⇒ 応用例 2) カイラリティ生成 [[HT](#), PRR 2, 023257 (2020)]



$$\frac{C_5}{vT(eB eE_0 n^2)} \quad \text{---} \quad \exp[-\pi m^2/e\bar{E}]$$



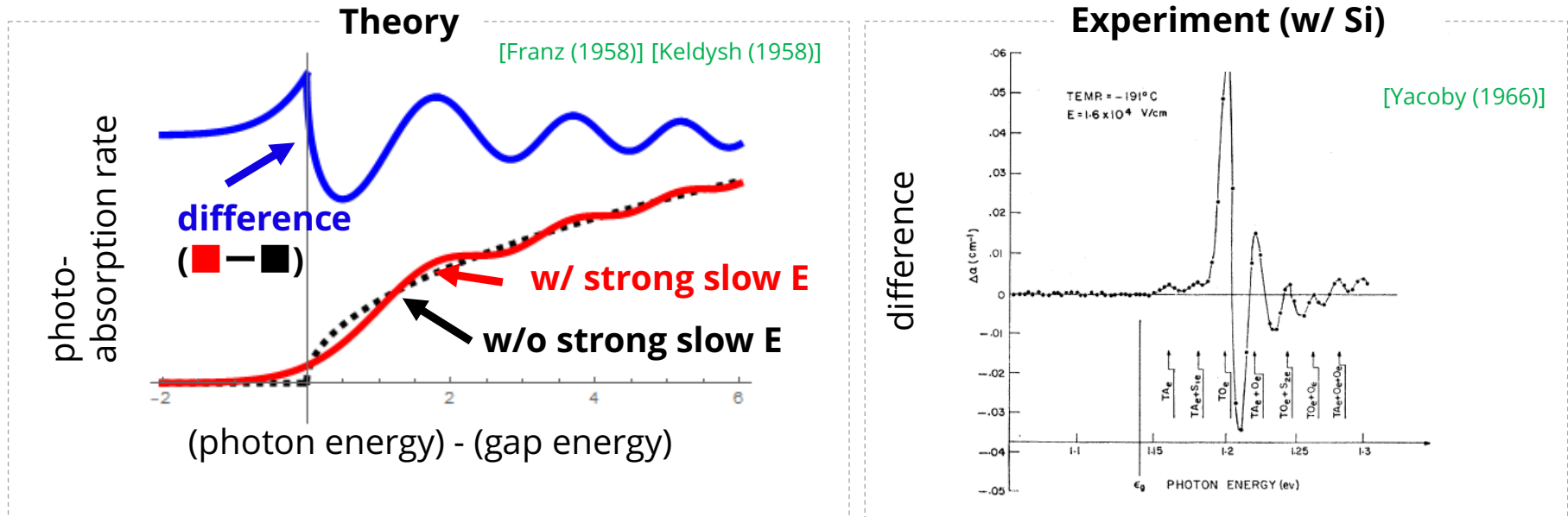
宣伝: Strong-field QEDのレビュー: [[Fedotov](#), [Ilderton](#), [Karbstein](#), [King](#), [Seipt](#), [HT](#), [Torgrimsson](#), 3月に出ます]

BACKUP

Franz-Keldysh effect in cond-mat

✓ Apply strong slow E-field & a photon (~ weak fast E-field) onto a semi-conductor, and measure photo-absorption rate

- photo-absorption rate $\sim \text{Im}[1\text{-loop action}] \sim$ particle production rate

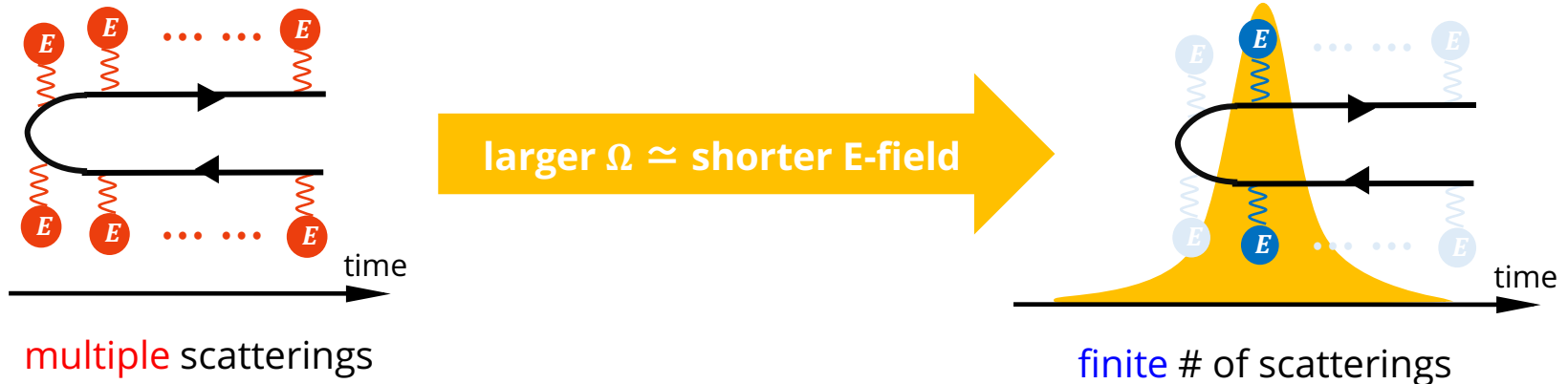


- Enhancement below the mass gap
⇒ **Looks very similar to the dynamically assisted Schwinger mechanism (?)**
- Oscillation above the mass gap (Franz-Keldysh oscillation)
- Enhancement is maximized around the mass gap

One-photon process

✓ Larger Ω , more perturbative

- because there is **no time to interact many times**, no matter how strong eE_0 is



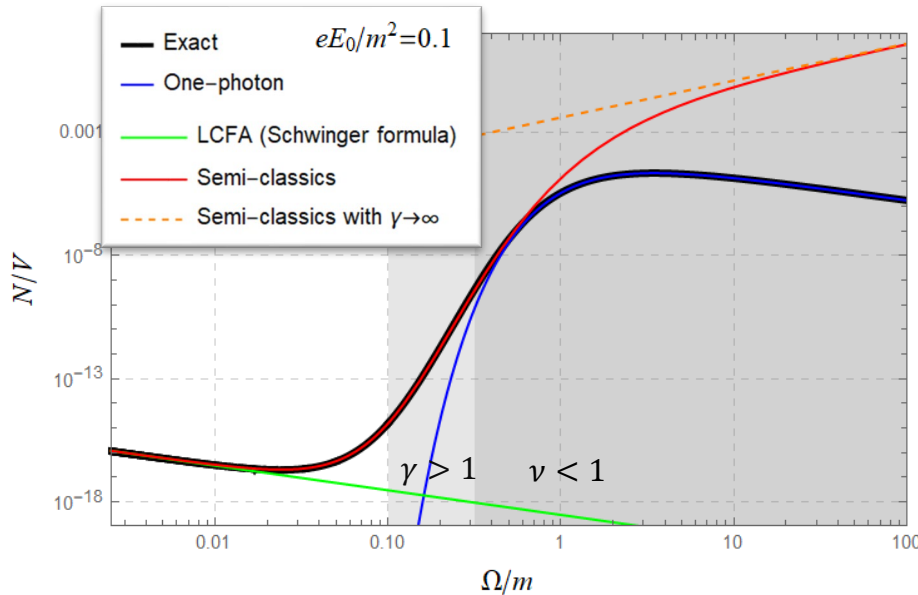
- should cover different region, as photon # should be huge $\frac{2m}{\Omega} \rightarrow \infty$ in the semi-classics
- analytical formula is available (for any field config. !)

$$N_{1\text{-photon}} = \sum_{s,s'} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' \left| \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{wavy line} \\ \text{p, s} \\ \text{p', s'} \end{array} \right|^2 = \frac{V}{(4\pi)^2} \int_{2m}^{\infty} d\omega \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}} \frac{1}{3} \left(2 + \frac{4m^2}{\omega^2} \right) |e\tilde{E}(\omega)|^2$$

[HI, Fujii, Itakura (2014)] [QFT textbook by Itzykson, Zuber]

Interplay b/w tunneling, multi-, one-photon

✓ An explicit demonstration for Sauter pulsed E-field $eE(t) = \frac{eE_0}{\cosh^2(\Omega t)}$



- **One-photon dominates for large Ω** , where semi-classical methods fail,
- **One-photon is more efficient** than tunneling ; N is the largest at $\Omega \sim 2m$

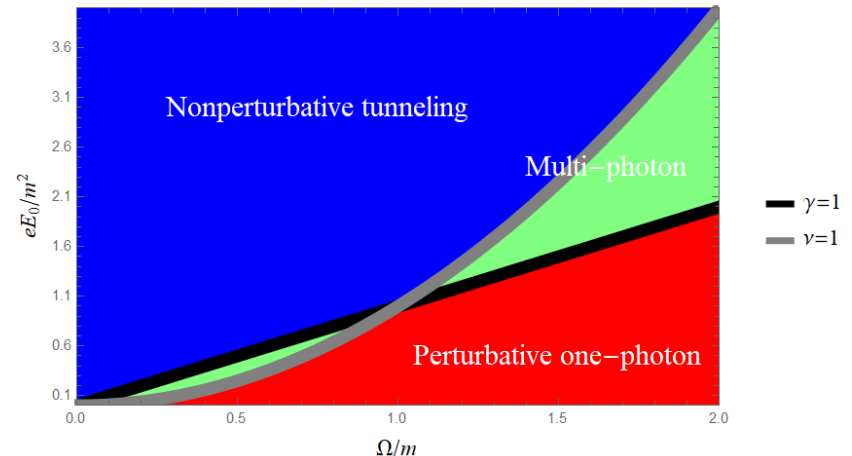
✓ **Two dimensionless parameters $\gamma = \frac{m\Omega}{eE_0}$, $\nu \equiv \frac{eE_0}{\Omega^2}$ control the interplay**

- Sauter field is solvable, which can be compared w/ Schwinger & one-photon

$$\gamma \gg 1, \nu \ll 1 \Rightarrow \text{pert. one-photon}$$

$$\gamma \ll 1, \nu \gg 1 \Rightarrow \text{non-pert. tunneling}$$

$$\begin{aligned} \bullet \nu &= \frac{eE_0/\Omega}{\Omega} = \frac{\text{(work done by E-field)}}{\text{(photon energy)}} \\ &= \text{(\# of photons involved)} \end{aligned}$$



Validity of Furry-picture perturbation theory

[Huang, HT, (2019)]

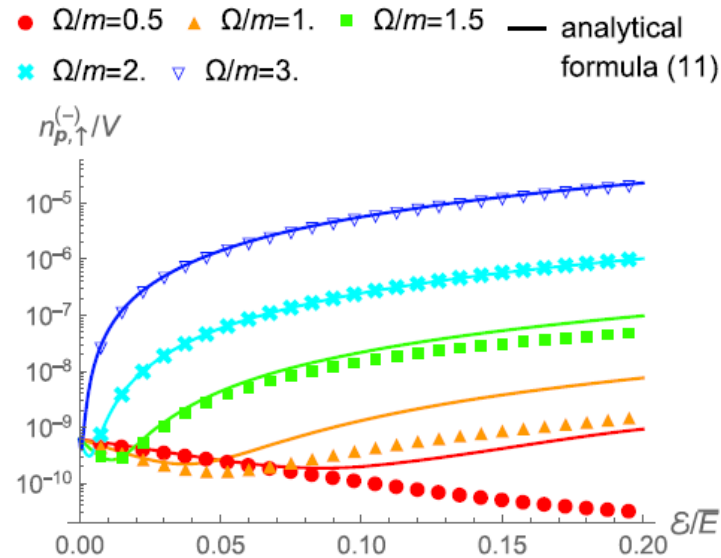


FIG. 9. A comparison between the numerical results (points) and the analytical results (lines) for the momentum distribution $n_{p,\uparrow}^{(-)}$ as a function of the strength of the perturbation \mathcal{E}_\perp for several values of the frequency Ω . The parameters are the same as in Fig. 3, i.e., $e\bar{E}/m^2 = 0.4$, $\mathcal{E}_3/\bar{E} = 0$, $p_\perp/m = 1$, $p_3/m = 0$, $\phi = 1$, and $m\tau = 100$.

- higher orders need to be included if fast field becomes stronger and slower

Analytical formula for dynamically assisted Q5

$$\frac{Q_5}{VT} = \frac{e\bar{E}e\bar{B}}{2\pi^2} e^{-\pi \frac{m^2}{e\bar{E}}} \times \left[1 + \frac{2\pi}{T} \left(\frac{m^2}{e\bar{E}} \right)^2 \int_0^\infty d\omega \left| \frac{\tilde{\mathcal{E}}(\omega)}{\bar{E}} {}_1\tilde{F}_1\left(1 - \frac{i m^2}{2 e\bar{E}}; 2; \frac{i \omega^2}{2 e\bar{E}}\right) \right|^2 \right]$$

Dynamical assistance by fast E-field \mathcal{E}

- Dynamical assistance

- is positive \Rightarrow **chirality is always enhanced**

- goes away when $m \rightarrow 0 \Rightarrow$ **important only for massive case**

- is independent of B-field

(\because B-field does not supply energy, i.e., does not affect the prod. mech.)

Furry-picture formula for dynamical assistance $E_S \parallel \mathcal{E}_f$

[HT, (2019)]

$$\frac{d^3 N_e}{d\mathbf{p}^3} = \frac{V}{(2\pi)^3} \exp \left[-\frac{\pi(m^2 + \mathbf{p}_\perp^2)}{eE_S} \right] \times \left| 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_S} \int_0^\infty d\omega \frac{\tilde{\mathcal{E}}_f(\omega)}{E_S} \exp \left[-\frac{i\omega^2 + 4\omega p_\parallel}{4eE_S} \right] {}_1F_1 \left(1 - \frac{i}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_S}; 2; \frac{i\omega^2}{2eE_S} \right) \right|^2$$

Schwinger mech. by slow E_S

Dynamical assistance by fast \mathcal{E}_f

- slow limit $\omega/\sqrt{eE_S} \ll 1$: ■ dominates \Rightarrow **usual Schwinger formula**

$$\frac{d^3 N_e}{d\mathbf{p}^3} \sim \frac{V}{(2\pi)^3} \exp \left[-\frac{\pi(m^2 + \mathbf{p}_\perp^2)}{eE_S} \right] \left| 1 + \frac{\pi}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_S} \frac{\mathcal{E}_f}{E_S} \right|^2 \sim \frac{V}{(2\pi)^3} \exp \left[-\frac{\pi(m^2 + \mathbf{p}_\perp^2)}{e(E_S + \mathcal{E}_f)} \right]$$

- fast limit $\omega/\sqrt{eE_S} \gg 1$: ■ dominates \Rightarrow **multi-photon pair prod. (LO)**

$$\frac{d^3 N_e}{d\mathbf{p}^3} \sim \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{\omega_p^2} \frac{|e\tilde{\mathcal{E}}_f(2\omega_p)|^2}{\omega_p^2}$$

Furry-picture formula for dynamical assistance $E_s \not\ll \mathcal{E}_f$

[Huang, HT, (2019)]

$$\frac{d^3 N_e}{d\mathbf{p}^3} = \frac{V}{(2\pi)^3} \exp \left[-\frac{\pi(m^2 + \mathbf{p}_\perp^2)}{eE_s} \right]$$

Dynamical assistance by fast \mathcal{E}_f

$$\times \left[1 + \int_0^\infty d\omega e^{-i\frac{\omega p_\parallel}{eE_s}} \frac{1}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_s} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_f(\omega) \cdot \mathbf{E}_s}{E_s^2} e^{-i\frac{\omega^2}{4eE_s}} {}_1F_1 \left(1 - \frac{i}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_s}; 2; \frac{i}{2} \frac{\omega^2}{eE_s} \right) \right. \\ \left. + i \int_0^\infty d\omega e^{-i\frac{\omega p_\parallel}{eE_s}} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_f(\omega) \cdot \mathbf{p}_\perp}{E_s \omega} \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{\omega^2}{4eE_s}} {}_1F_1 \left(1 - \frac{i}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_s}; 1; \frac{i}{2} \frac{\omega^2}{eE_s} \right) \right] \right. \\ \left. + s \times i \int_0^\infty d\omega e^{-i\frac{\omega p_\parallel}{eE_s}} \frac{(\tilde{\mathcal{E}}_f(\omega) \times \mathbf{p}_\perp) \cdot \mathbf{E}_s}{E_s^2 \omega} \operatorname{Im} \left[e^{-i\frac{\omega^2}{4eE_s}} {}_1F_1 \left(1 - \frac{i}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_s}; 1; \frac{i}{2} \frac{\omega^2}{eE_s} \right) \right] \right. \\ \left. + \int_0^\infty d\omega e^{-i\frac{\omega p_\parallel}{eE_s}} \frac{m}{\omega} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_f^x(\omega)}{E_s} \operatorname{Im} \left[e^{-i\frac{\omega^2}{4eE_s}} {}_1F_1 \left(1 - \frac{i}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE_s}; 1; \frac{i}{2} \frac{\omega^2}{eE_s} \right) \right] \right]^2$$

Sch. mech. by slow E_s

• becomes complicated (red = new terms), but the basic structure is the same

• **spin-dependence appears even without magnetic fields**

∴ Dirac particle has a spin-orbit coupling $\mathbf{s} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{E})$ [Foldy, Wouthuysen (1950)]
[Tani (1951)]

e.g. application to spintronics [Huang, Matsuo, HT (2019)]