

# 完全WKB法の 粒子生成への応用

田屋 英俊

理研iTHEMS

- 完全WKBの論文: [HT](#), Fujimori, Misumi, Nitta, Sakai, JHEP 03, 082 (2021) [arXiv:2010.16080]
- 高次高調波発生への応用: [HT](#), Hongo, Ikeda, Phys. Rev. B 104, L140305 (2021) [arXiv:2105.12446]
- strong-field QEDのレビュー: Fedotov, Ilderton, Karbstein, King, Seipt, [HT](#), Torgrimsson, arXiv:2203.00019

# 内容

## 1. イントロダクション

- ・「強い場による真空からの粒子生成」のレビュー
- ・「完全WKB法」のレビュー

## 2. メインの計算の話

- ・粒子数公式の導出

## 3. まとめ

## 4. オマケ: 高次高調波発生への応用

# 内容

## 1. イントロダクション

- ・「強い場による真空からの粒子生成」のレビュー
- ・「完全WKB法」のレビュー

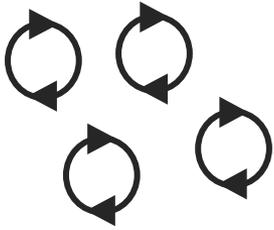
## 2. メインの計算の話

- ・粒子数公式の導出

## 3. まとめ

## 4. オマケ: 高次高調波発生への応用

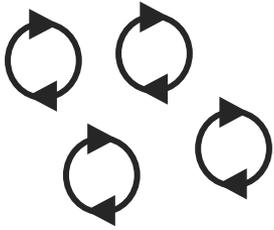
# 強い場による真空からの粒子生成



真空

実粒子数=0

# 強い場による真空からの粒子生成

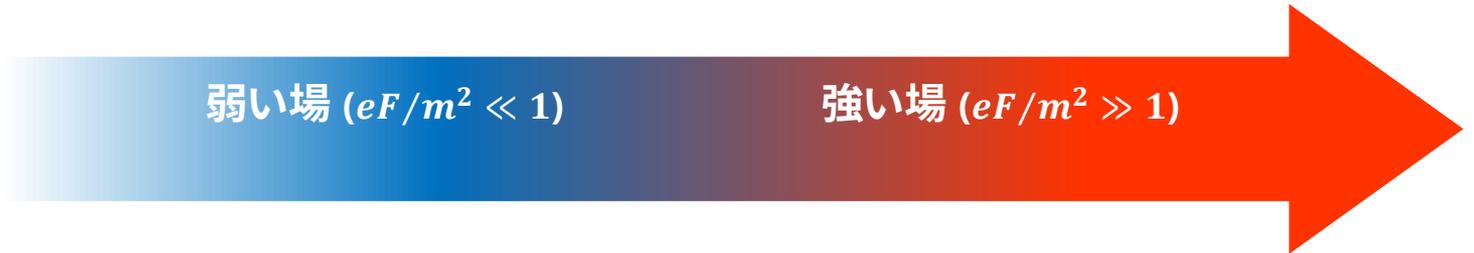


真空

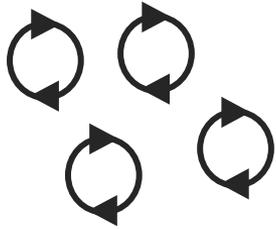
実粒子数=0

弱い場 ( $eF/m^2 \ll 1$ )

強い場 ( $eF/m^2 \gg 1$ )

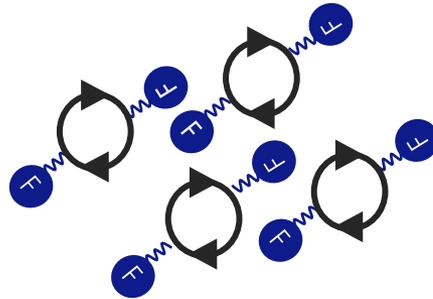


# 強い場による真空からの粒子生成



真空

実粒子数=0



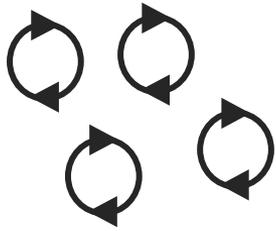
弱い場 ( $eF/m^2 \ll 1$ )

真空 + 摂動効果 → 実粒子数  $\approx 0$

強い場 ( $eF/m^2 \gg 1$ )

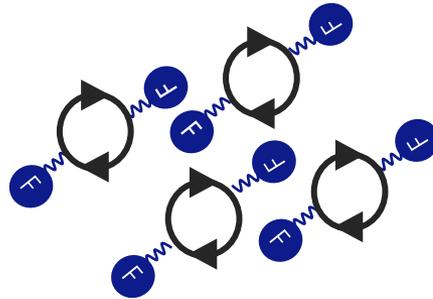


# 強い場による真空からの粒子生成



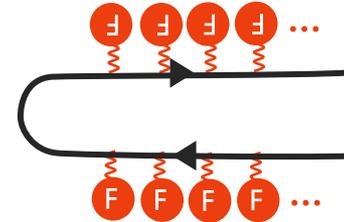
真空

実粒子数=0



弱い場 ( $eF/m^2 \ll 1$ )

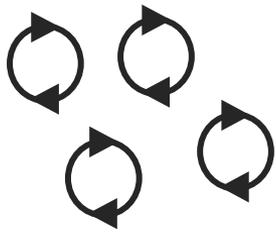
真空 + 摂動効果 → 実粒子数  $\approx 0$



強い場 ( $eF/m^2 \gg 1$ )

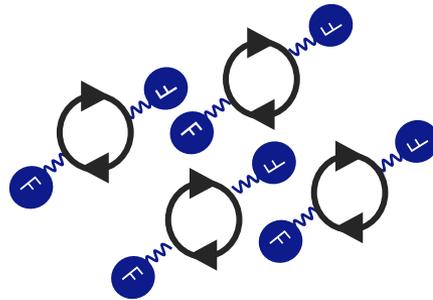
真空 + **非**摂動効果 → 実粒子数  $\neq 0$

# 強い場による真空からの粒子生成



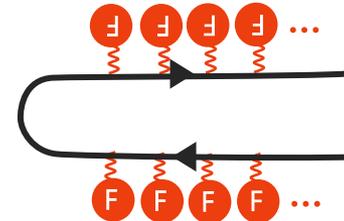
真空

実粒子数=0



弱い場 ( $eF/m^2 \ll 1$ )

真空 + 摂動効果 → 実粒子数  $\approx 0$



強い場 ( $eF/m^2 \gg 1$ )

真空 + **非**摂動効果 → 実粒子数  $\neq 0$

- さまざまな極限状況で起こると予想: 重イオン衝突、ブラックホール、初期宇宙、超重原子核、...
- 実験は無理だったが、レーザーによる検証が現実味を帯びてきた。物性系の類似物の提案も。  
[CPA法; 2018年ノーベル賞]
- 場の理論の非摂動的な側面とか真空の構造とか基礎的なことと関係している

# 粒子生成の理論

[Birrel, Davies, "Quantum Fields in Curved Space," Cambridge (1984)]

生成消滅演算子のBogoliubov変換 = 場の方程式のStokes現象

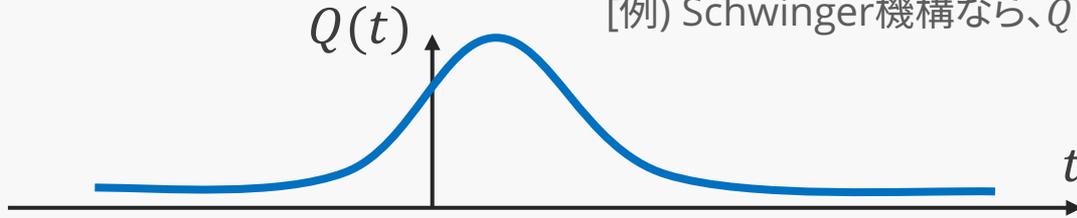
# 粒子生成の理論

[Birrel, Davies, "Quantum Fields in Curved Space," Cambridge (1984)]

## 生成消滅演算子のBogoliubov変換 = 場の方程式のStokes現象

- 複素スカラー場を外場にさらした状況:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)] \hat{\phi}$

[例) Schwinger機構なら、 $Q(t) = m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t))^2$ ]

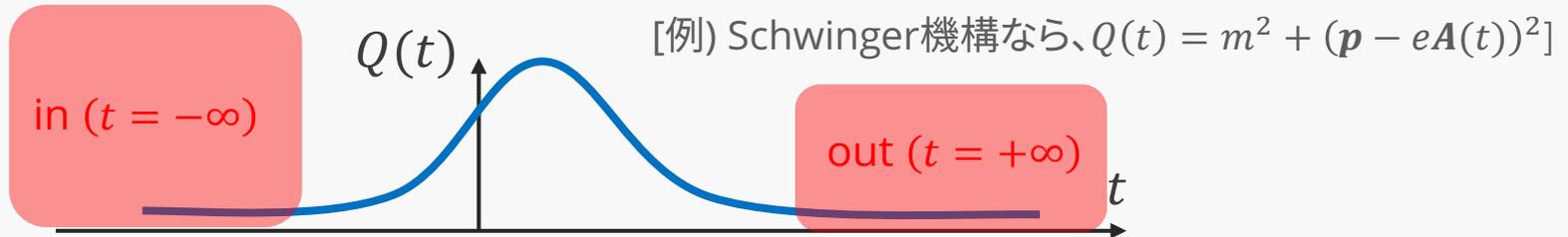


# 粒子生成の理論

[Birrel, Davies, "Quantum Fields in Curved Space," Cambridge (1984)]

## 生成消滅演算子のBogoliubov変換 = 場の方程式のStokes現象

- 複素スカラー場を外場にさらした状況:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)] \hat{\phi}$



- $Q(t)$ が時間依存だと、正負のエネルギー固有状態(時間並進 $-i\partial_t$ の固有状態)は存在しない  
⇒ 漸近状態 $Q(t) \rightarrow \text{const.}$ でのみ、平面波で粒子をwell-definedに定義可能

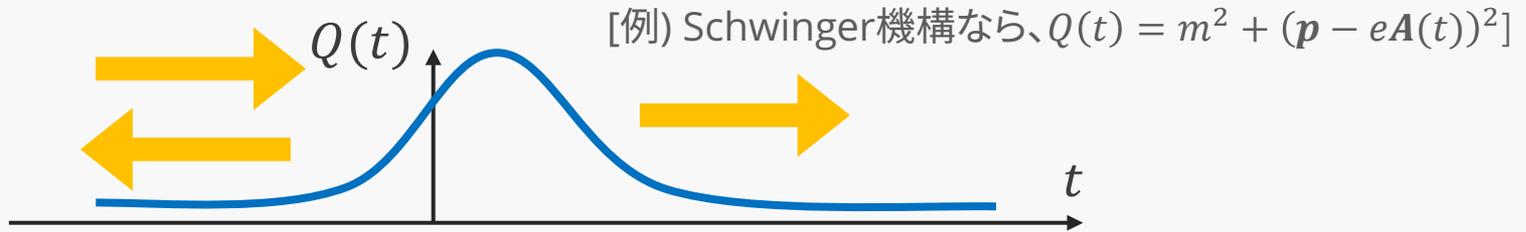
$$\hat{\phi}(t \rightarrow -\infty) \equiv e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{in}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger, \quad \hat{\phi}(t \rightarrow +\infty) \equiv e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{out}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{out}}^\dagger$$

# 粒子生成の理論

[Birrel, Davies, "Quantum Fields in Curved Space," Cambridge (1984)]

## 生成消滅演算子のBogoliubov変換 = 場の方程式のStokes現象

- 複素スカラー場を外場にさらした状況:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)] \hat{\phi}$



- $Q(t)$ が時間依存だと、正負のエネルギー固有状態(時間並進 $-i\partial_t$ の固有状態)は存在しない  
⇒ 漸近状態 $Q(t) \rightarrow \text{const.}$ でのみ、平面波で粒子をwell-definedに定義可能

$$\hat{\phi}(t \rightarrow -\infty) \equiv e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{in}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger, \quad \hat{\phi}(t \rightarrow +\infty) \equiv e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{out}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{out}}^\dagger$$

- 始/終状態の粒子の生成消滅演算子は一致しない $\hat{a}_{\text{in}} \neq \hat{a}_{\text{out}}$ 。なぜなら、ある漸近状態の正負の平面波は反対の漸近状態で混合(場の方程式の漸近解のStokes現象)

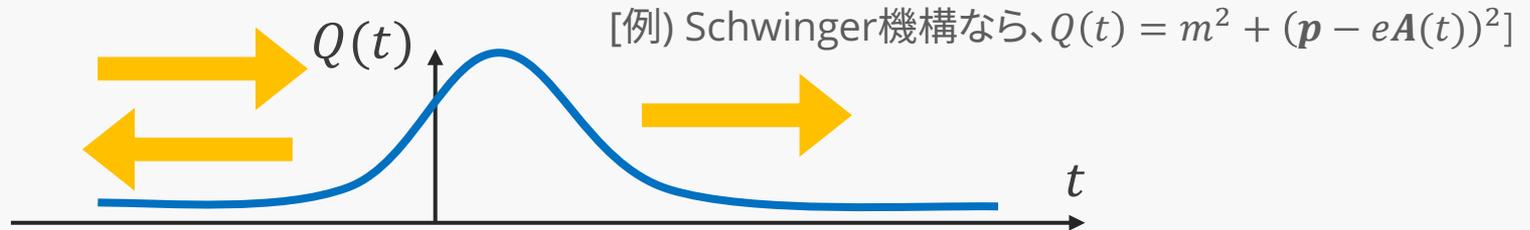
$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{in}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (\alpha e^{-i\omega t} + \beta e^{+i\omega t}) \hat{a}_{\text{in}} + (\beta^* e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{+i\omega t}) \hat{b}_{\text{in}}^\dagger \\ &= e^{-i\omega t} \underbrace{(\alpha \hat{a}_{\text{in}} + \beta^* \hat{b}_{\text{in}}^\dagger)}_{\hat{a}_{\text{out}}} + e^{+i\omega t} \underbrace{(\beta \hat{a}_{\text{in}} + \alpha^* \hat{b}_{\text{in}}^\dagger)}_{\hat{b}_{\text{out}}^\dagger} = \hat{a}_{\text{out}} + \hat{b}_{\text{out}}^\dagger \end{aligned}$$

# 粒子生成の理論

[Birrel, Davies, "Quantum Fields in Curved Space," Cambridge (1984)]

## 生成消滅演算子のBogoliubov変換 = 場の方程式のStokes現象

- 複素スカラー場を外場にさらした状況:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)] \hat{\phi}$



- $Q(t)$ が時間依存だと、正負のエネルギー固有状態(時間並進 $-i\partial_t$ の固有状態)は存在しない  
⇒ 漸近状態 $Q(t) \rightarrow \text{const.}$ でのみ、平面波で粒子をwell-definedに定義可能

$$\hat{\phi}(t \rightarrow -\infty) \equiv e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{in}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger, \quad \hat{\phi}(t \rightarrow +\infty) \equiv e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{out}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{out}}^\dagger$$

- 始/終状態の粒子の生成消滅演算子は一致しない $\hat{a}_{\text{in}} \neq \hat{a}_{\text{out}}$ 。なぜなら、ある漸近状態の正負の平面波は反対の漸近状態で混合(場の方程式の漸近解のStokes現象)

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} \hat{a}_{\text{in}} + e^{+i\omega t} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (\alpha e^{-i\omega t} + \beta e^{+i\omega t}) \hat{a}_{\text{in}} + (\beta^* e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{+i\omega t}) \hat{b}_{\text{in}}^\dagger \\ &= e^{-i\omega t} \underbrace{(\alpha \hat{a}_{\text{in}} + \beta^* \hat{b}_{\text{in}}^\dagger)}_{\hat{a}_{\text{out}}} + e^{+i\omega t} \underbrace{(\beta \hat{a}_{\text{in}} + \alpha^* \hat{b}_{\text{in}}^\dagger)}_{\hat{b}_{\text{out}}^\dagger} \end{aligned}$$

- 粒子数演算子の真空期待値は終状態で非ゼロ  $\langle \text{vac}; \text{in} | \hat{a}_{\text{out}}^\dagger \hat{a}_{\text{out}} | \text{vac}; \text{in} \rangle = |\beta|^2 \delta^3(\mathbf{0})$   
⇒ **粒子生成! Bogoliubov係数 $\beta$ が分かれば良い**

# 理論的な現状

**Bogoliubov係数 $\beta \cong$ 生成粒子数は  
簡単なポテンシャルでしかちゃんと求まっていない**

- 微分方程式  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi$  が可解となる場合にはよく調べられている
  - 例)  $Q(t) \sim t^2 \Rightarrow$  Weber方程式  $\Rightarrow$  一様定常電場に対するSchwingerの公式  
Landau-Zenerの非断熱遷移確率 [Schwinger (1951)]  
... [Landau (1932)] [Zener (1932)]  
[Stueckelberg (1932)] [Majorana (1932)]
- 一般の場合に使える公式を求めたい
  - 現実の物理系で実現されるポテンシャルは一般に複雑
  - 数値計算などで、ポテンシャルが変わると大きく粒子生成数も変わることは既知

**今回: 完全WKB法を使って公式を (半古典近似の範囲で) 求める**

# 完全WKB法

[Voros (1983)] [Pham, Aoki, Koike, Takeji, ...] [日本語のRef.: 河合, 竹井, 『特異摂動の代数幾何学』, 岩波書店]

完全WKB法 = “普通”のWKB法 + Borel総和法

(線形常)微分方程式を断熱展開  
( $\hbar \rightarrow 0$ )して摂動的に解く方法

階乗 $n!$ 程度に発散する形  
式的な摂動級数からwell-  
definedな関数を得る総  
和法

- 普通のWKB法を数学的にwell-definedにする, i.e., “完全”にする
- 微分方程式のStokes現象を理解する強力な道具
- 物理への応用が最近ちらほら

量子化条件: [Kashani-Poor (2016)]  
[Sueishi, Kamata, Misumi, Unsal (2020~)]  
[Imaizumi (2020~)] [Ito et al. (2021~)]

粒子生成: [Enomoto, Matsuda (2020~)]

# “普通”のWKB法

“普通”のWKB法 = 微分方程式を断熱展開( $\hbar \rightarrow 0$ )  
して摂動的に解く方法

# “普通”のWKB法

**“普通”のWKB法** = 微分方程式を断熱展開( $\hbar \rightarrow 0$ )  
して摂動的に解く方法

- Schrodinger型の2階微分方程式:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$

# “普通”のWKB法

**“普通”のWKB法** = 微分方程式を断熱展開( $\hbar \rightarrow 0$ )  
して摂動的に解く方法

• Schrodinger型の2階微分方程式:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$

•  $\hbar$  はポテンシャルの“速さ”と関係している

$$t \equiv \hbar\tau \Rightarrow 0 = [\partial_\tau^2 + Q(\hbar\tau)]\phi(\tau) \xrightarrow{\hbar \ll 1} [\partial_\tau^2 + Q(0)]\phi(\tau)$$

# “普通”のWKB法

“普通”のWKB法 = 微分方程式を断熱展開( $\hbar \rightarrow 0$ )  
して摂動的に解く方法

• Schrodinger型の2階微分方程式:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$

•  $\hbar$  はポテンシャルの“速さ”と関係している

$$t \equiv \hbar\tau \Rightarrow 0 = [\partial_\tau^2 + Q(\hbar\tau)]\phi(\tau) \xrightarrow{\hbar \ll 1} [\partial_\tau^2 + Q(0)]\phi(\tau)$$

• よって、 $\hbar \ll 1$  なら平面波が良い解。その周りで摂動展開する

$$\phi_\pm(t; \hbar) \equiv \exp\left[\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}\right] \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n$$

平面波  $\sim \exp[\mp \frac{i}{\hbar} \sqrt{Q}t]$

摂動寄与  $\psi_\pm$

# “普通”のWKB法

“普通”のWKB法 = 微分方程式を断熱展開( $\hbar \rightarrow 0$ )  
して摂動的に解く方法

• Schrodinger型の2階微分方程式:  $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$

•  $\hbar$  はポテンシャルの“速さ”と関係している

$$t \equiv \hbar\tau \Rightarrow 0 = [\partial_\tau^2 + Q(\hbar\tau)]\phi(\tau) \xrightarrow{\hbar \ll 1} [\partial_\tau^2 + Q(0)]\phi(\tau)$$

• よって、 $\hbar \ll 1$  なら平面波が良い解。その周りで摂動展開する

$$\phi_\pm(t; \hbar) \equiv \underbrace{\exp\left[\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}\right]}_{\text{平面波} \sim \exp[\mp \frac{i}{\hbar} \sqrt{Q}t]} \times \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n}_{\text{摂動寄与} \psi_\pm}$$

• 係数 $\psi_{\pm,n}$ は逐次的に計算できる。が、一般に階乗発散 $\psi_{\pm,n} \sim n!$

⇒ 普通のWKB法は収束半径0でill-defined。なんとかする必要

# Borel総和法

**Borel総和法** =

階乗 $n!$ 程度に発散する形式的な摂動級数  
からwell-definedな関数を得る総和法

# Borel総和法

**Borel総和法** =

階乗 $n!$ 程度に発散する形式的な摂動級数からwell-definedな関数を得る総和法

- 形式級数から"Borel変換"を作って、それをLaplace変換する

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(t; \hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n &\Rightarrow B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \eta^n \quad (\text{Borel変換}) \\ &\Rightarrow \Psi_{\pm}(t; \hbar) \equiv \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} B[\psi_{\pm}](t; \eta) \quad (\text{Borel和})\end{aligned}$$

\* Laplace変換はBorel変換の逆変換みたいなもの

$$\Psi_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \sum_n \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \eta^n \sim \sum_n \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \eta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n$$

# Borel総和法

**Borel総和法** =

階乗 $n!$ 程度に発散する形式的な摂動級数からwell-definedな関数を得る総和法

- 形式級数から"Borel変換"を作って、それをLaplace変換する

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(t; \hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n &\Rightarrow B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \eta^n \quad (\text{Borel変換}) \\ &\Rightarrow \Psi_{\pm}(t; \hbar) \equiv \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} B[\psi_{\pm}](t; \eta) \quad (\text{Borel和})\end{aligned}$$

\* Laplace変換はBorel変換の逆変換みたいなもの

$$\Psi_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \eta^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \eta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n$$

- Borel和は普通のWKBを漸近展開として持つwell-definedな関数

# Borel総和法

**Borel総和法** =

階乗 $n!$ 程度に発散する形式的な摂動級数からwell-definedな関数を得る総和法

- 形式級数から"Borel変換"を作って、それをLaplace変換する

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(t; \hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n &\Rightarrow B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \eta^n \quad (\text{Borel変換}) \\ &\Rightarrow \Psi_{\pm}(t; \hbar) \equiv \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} B[\psi_{\pm}](t; \eta) \quad (\text{Borel和})\end{aligned}$$

\* Laplace変換はBorel変換の逆変換みたいなもの

$$\Psi_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \eta^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(t)}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \eta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(t) \hbar^n$$

- Borel和は普通のWKBを漸近展開として持つwell-definedな関数
- ただし、一般にBorel変換は $\eta$ 平面で特異性を持ち、 $t$ に応じ動く  
 $\Rightarrow$  Stokes現象と関係

# もう少し具体的な例: Airy方程式

- $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$  with  $Q(t) \propto (t - t_{\text{tp}})$

# もう少し具体的な例: Airy方程式

- $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$  with  $Q(t) \propto (t - t_{\text{tp}})$

- WKB ansatz を置いて逐次的に解く

$$\phi_{\pm}(t; \hbar) \equiv e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(t) \hbar^n \Rightarrow \psi_{\pm, n} \sim \#^n n! \text{ で階乗発散}$$

# もう少し具体的な例: Airy方程式

- $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$  with  $Q(t) \propto (t - t_{\text{tp}})$

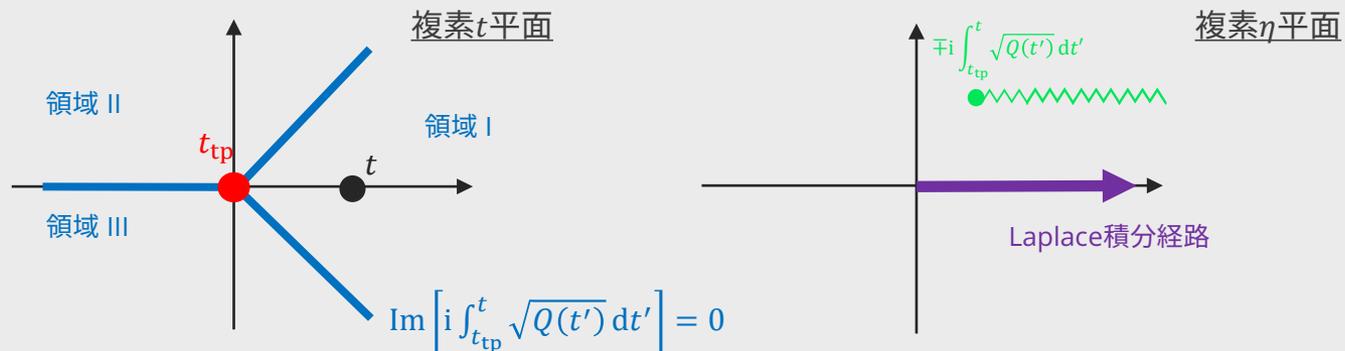
- WKB ansatz を置いて逐次的に解く

$$\phi_{\pm}(t; \hbar) \equiv e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(t) \hbar^n \Rightarrow \psi_{\pm, n} \sim \#^n n! \text{ で階乗発散}$$

- Borel変換を求める

$$B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_n \frac{\psi_{\pm, n}(t)}{n!} \eta^n \propto {}_2F_1 \left( \#, \#; \#; \frac{\eta}{\mp i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt'} \right)$$

$\Rightarrow \text{Im} \left[ i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0$  でLaplace変換が  ${}_2F_1$  の特異性に当たる



# もう少し具体的な例: Airy方程式

- $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$  with  $Q(t) \propto (t - t_{\text{tp}})$

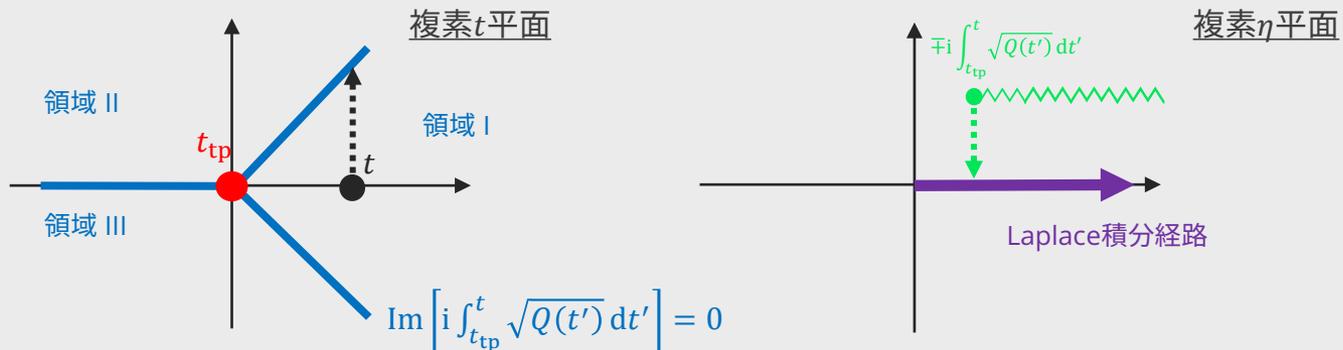
- WKB ansatz を置いて逐次的に解く

$$\phi_{\pm}(t; \hbar) \equiv e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(t) \hbar^n \Rightarrow \psi_{\pm, n} \sim \#^n n! \text{ で階乗発散}$$

- Borel変換を求める

$$B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_n \frac{\psi_{\pm, n}(t)}{n!} \eta^n \propto {}_2F_1 \left( \#, \#; \#; \frac{\eta}{\mp i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt'} \right)$$

$\Rightarrow \text{Im} \left[ i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0$  でLaplace変換が  ${}_2F_1$  の特異性に当たる



# もう少し具体的な例: Airy方程式

- $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$  with  $Q(t) \propto (t - t_{\text{tp}})$

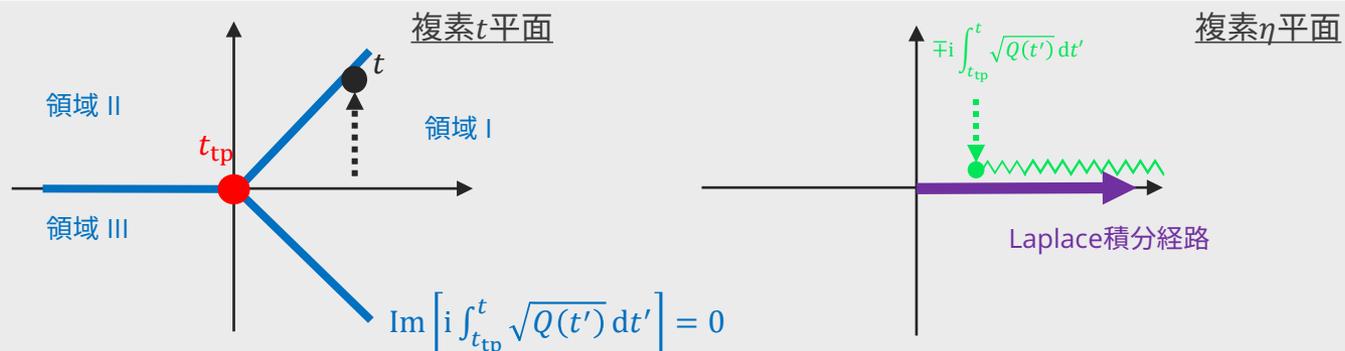
- WKB ansatz を置いて逐次的に解く

$$\phi_{\pm}(t; \hbar) \equiv e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(t) \hbar^n \Rightarrow \psi_{\pm, n} \sim \#^n n! \text{ で階乗発散}$$

- Borel変換を求める

$$B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_n \frac{\psi_{\pm, n}(t)}{n!} \eta^n \propto {}_2F_1 \left( \#, \#; \#; \frac{\eta}{\mp i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt'} \right)$$

$\Rightarrow \text{Im} \left[ i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0$  でLaplace変換が  ${}_2F_1$  の特異性に当たる



# もう少し具体的な例: Airy方程式

- $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$  with  $Q(t) \propto (t - t_{tp})$

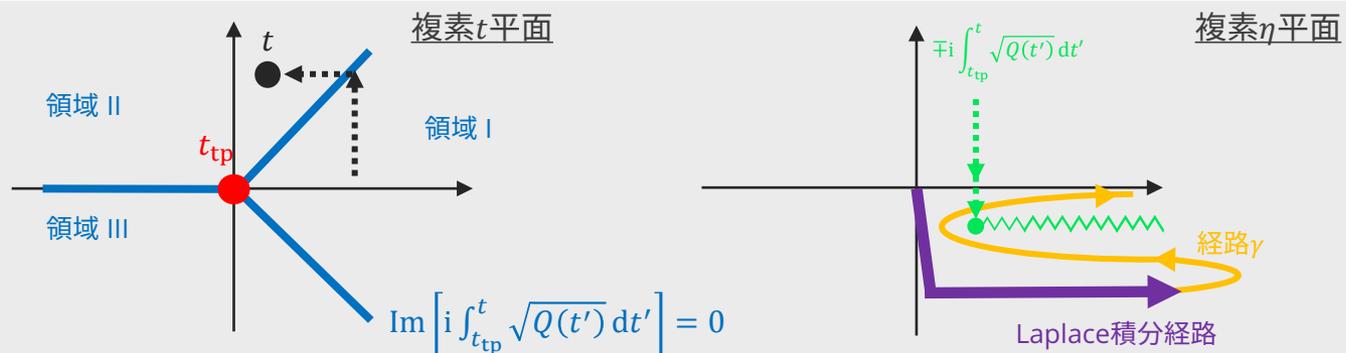
- WKB ansatz を置いて逐次的に解く

$$\phi_{\pm}(t; \hbar) \equiv e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(t) \hbar^n \Rightarrow \psi_{\pm, n} \sim \#^n n! \text{ で階乗発散}$$

- Borel変換を求める

$$B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_n \frac{\psi_{\pm, n}(t)}{n!} \eta^n \propto {}_2F_1 \left( \#, \#; \#; \frac{\eta}{\mp i \int_{t_{tp}}^t \sqrt{Q(t')} dt'} \right)$$

$\Rightarrow \text{Im} \left[ i \int_{t_{tp}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0$  でLaplace変換が  ${}_2F_1$  の特異性に当たる



# もう少し具体的な例: Airy方程式

- $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi(t)$  with  $Q(t) \propto (t - t_{tp})$

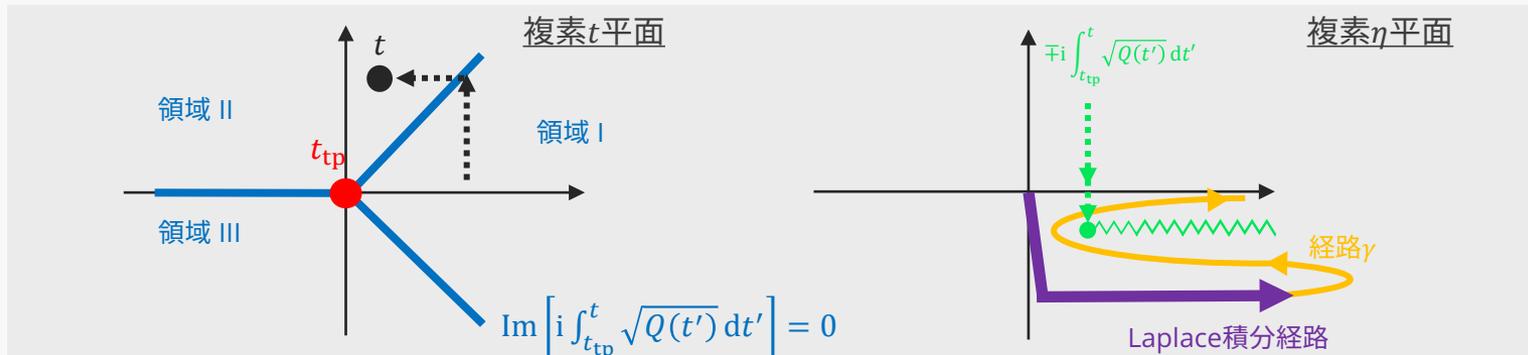
- WKB ansatz を置いて逐次的に解く

$$\phi_{\pm}(t; \hbar) \equiv e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(t) \hbar^n \Rightarrow \psi_{\pm, n} \sim \#^n n! \text{ で階乗発散}$$

- Borel変換を求める

$$B[\psi_{\pm}](t; \eta) \equiv \sum_n \frac{\psi_{\pm, n}(t)}{n!} \eta^n \propto {}_2F_1 \left( \#, \#; \#; \frac{\eta}{\mp i \int_{t_{tp}}^t \sqrt{Q(t')} dt'} \right)$$

$\Rightarrow \text{Im} \left[ i \int_{t_{tp}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0$  でLaplace変換が  ${}_2F_1$  の特異性に当たる



- Borel和  $\Phi_{\pm} \equiv e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \times \Psi_{\pm}$  は、領域 I, II, III の間で非連続 (Stokes現象)

$$\Phi_{\pm}^{\text{II}} = \Phi_{\pm}^{\text{I}} + e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sqrt{Q(t')}} \int_{\gamma} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} B[\psi_{\pm}](t; \eta) = \Phi_{\pm}^{\text{I}} + \# \times \Phi_{\mp}^{\text{I}}$$

# 一般の場合

[Voros (1983)] [Aoki, Koike, Takei (1991)]

# 一般の場合

[Voros (1983)] [Aoki, Koike, Takei (1991)]

**[定理1]** 任意の2階常微分方程式に対し、WKB解はStokes線 $C_{t_{\text{tp}}}$ でStokes現象を起こす:

$$C_{t_{\text{tp}}} \equiv \left\{ t \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \left[ i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0 \right\}$$

ここで、変わり点 $t_{\text{tp}}$ は $0 = Q(t_{\text{tp}})$ となる点のこと。

# 一般の場合

[Voros (1983)] [Aoki, Koike, Takei (1991)]

**[定理1]** 任意の2階常微分方程式に対し、WKB解はStokes線 $C_{t_{\text{tp}}}$ でStokes現象を起こす:

$$C_{t_{\text{tp}}} \equiv \left\{ t \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \left[ i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0 \right\}$$

ここで、変わり点 $t_{\text{tp}}$ は $0 = Q(t_{\text{tp}})$ となる点のこと。

**[定理2]** Stokes線を反時計回りに跨ぎ領域I→IIに移るとき、Stokes現象は以下で書ける:

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{II}} \\ \Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix} = T_{\text{Airy}} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{I}} \\ \Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad T_{\text{Airy}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \Theta(-s) \times i e^{s\sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} \\ \Theta(s) \times i e^{s\sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{t_{\text{tp}}} \equiv 2i \int_{t_0}^{t_{\text{tp}}} dt' \sqrt{Q(t')}, s \equiv \text{sgn}[\text{Re}[i \int_{t_{\text{tp}}}^{t \in C_{t_{\text{tp}}}} dt' \sqrt{Q(t')}] ]$$

**ただし**、(1)  $Q(t) = 0 + c(t - t_{\text{tp}}) + O(|t - t_{\text{tp}}|^2)$  (w/  $c \neq 0$ ) と振舞い、(2) "Stokes segment"がないこと、を仮定。Stokes segmentとは、Stokes線が縮退した線のこと。

# 一般の場合

[Voros (1983)] [Aoki, Koike, Takei (1991)]

**[定理1]** 任意の2階常微分方程式に対し、WKB解はStokes線 $C_{t_{\text{tp}}}$ でStokes現象を起こす:

$$C_{t_{\text{tp}}} \equiv \left\{ t \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \left[ i \int_{t_{\text{tp}}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0 \right\}$$

ここで、変わり点 $t_{\text{tp}}$ は $0 = Q(t_{\text{tp}})$ となる点のこと。

**[定理2]** Stokes線を反時計回りに跨ぎ領域I→IIに移るとき、Stokes現象は以下で書ける:

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{II}} \\ \Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix} = T_{\text{Airy}} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{I}} \\ \Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad T_{\text{Airy}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \Theta(-s) \times i e^{s\sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} \\ \Theta(s) \times i e^{s\sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{t_{\text{tp}}} \equiv 2i \int_{t_0}^{t_{\text{tp}}} dt' \sqrt{Q(t')}, s \equiv \text{sgn} \left[ \text{Re} \left[ i \int_{t_{\text{tp}}}^{t \in C_{t_{\text{tp}}}} dt' \sqrt{Q(t')} \right] \right]$$

**ただし**、(1)  $Q(t) = 0 + c(t - t_{\text{tp}}) + O(|t - t_{\text{tp}}|^2)$  (w/  $c \neq 0$ ) と振舞い、(2) "Stokes segment"がないこと、を仮定。Stokes segmentとは、Stokes線が縮退した線のこと。

## 完全WKB法による微分方程式のStokes現象の記述

1. Stokes図を書き下す
2. 関係を求めたい領域を結ぶpathを書く

3. pathに当たるStokes線の接続行列を全て掛ける:  $\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{B}} \\ \Phi_-^{\text{B}} \end{pmatrix} = T_1 T_2 \cdots T_n \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{A}} \\ \Phi_-^{\text{A}} \end{pmatrix}$

# 内容

## 1. イントロダクション

- ・「強い場による真空からの粒子生成」のレビュー
- ・「完全WKB法」のレビュー

## 2. メインの計算の話

- ・粒子数公式の導出

## 3. まとめ

## 4. オマケ: 高次高調波発生への応用

# アイデア

粒子生成の定式化 = 場の方程式のStokes現象を調べること

# アイデア

粒子生成の定式化 = 場の方程式のStokes現象を調べること

完全WKB法を使う

# アイデア

粒子生成の定式化 = 場の方程式のStokes現象を調べること

## 完全WKB法を使う

### 1. Stokes図を同定する

[仮定1] 時間依存する外場にさらされたスカラー場

$$0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\phi \quad [\text{例) Schwinger機構なら、} Q(t) = m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t))^2]$$

[仮定2]  $Q(t)$ は、全複素 $t$ 平面上で解析的

[仮定3]  $Q(t)$ は、実軸 $\mathbb{R}$ 上で正の実数値 $\mathbb{R}^+$ を取る

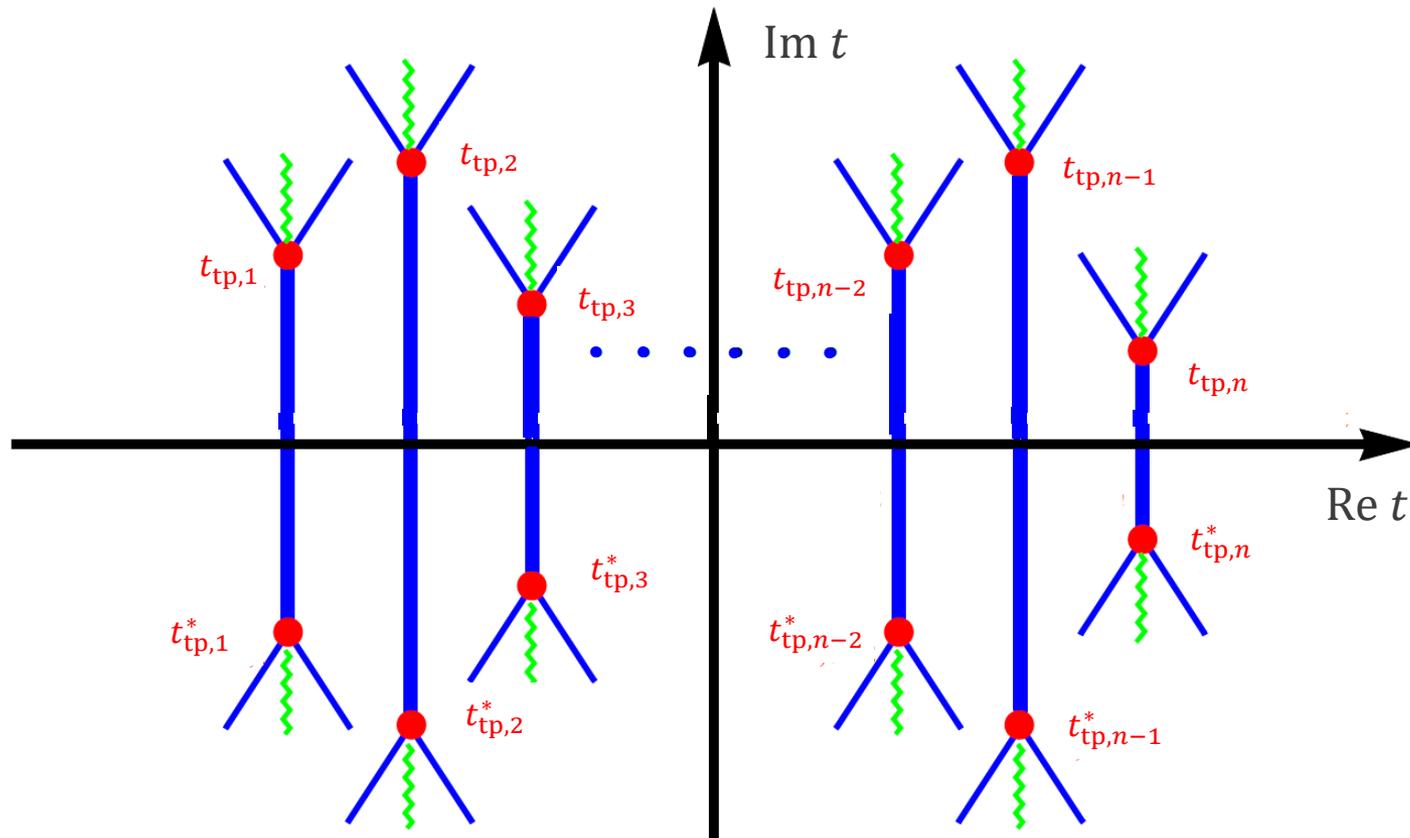
[仮定4]  $Q'(t_{\text{tp}}) \neq 0$  (変わり点付近でAiryポテンシャル的に振舞う)

### 2. Stokes segmentに対する接続行列を求める

[仮定5] 半古典近似 $\hbar \ll 1$

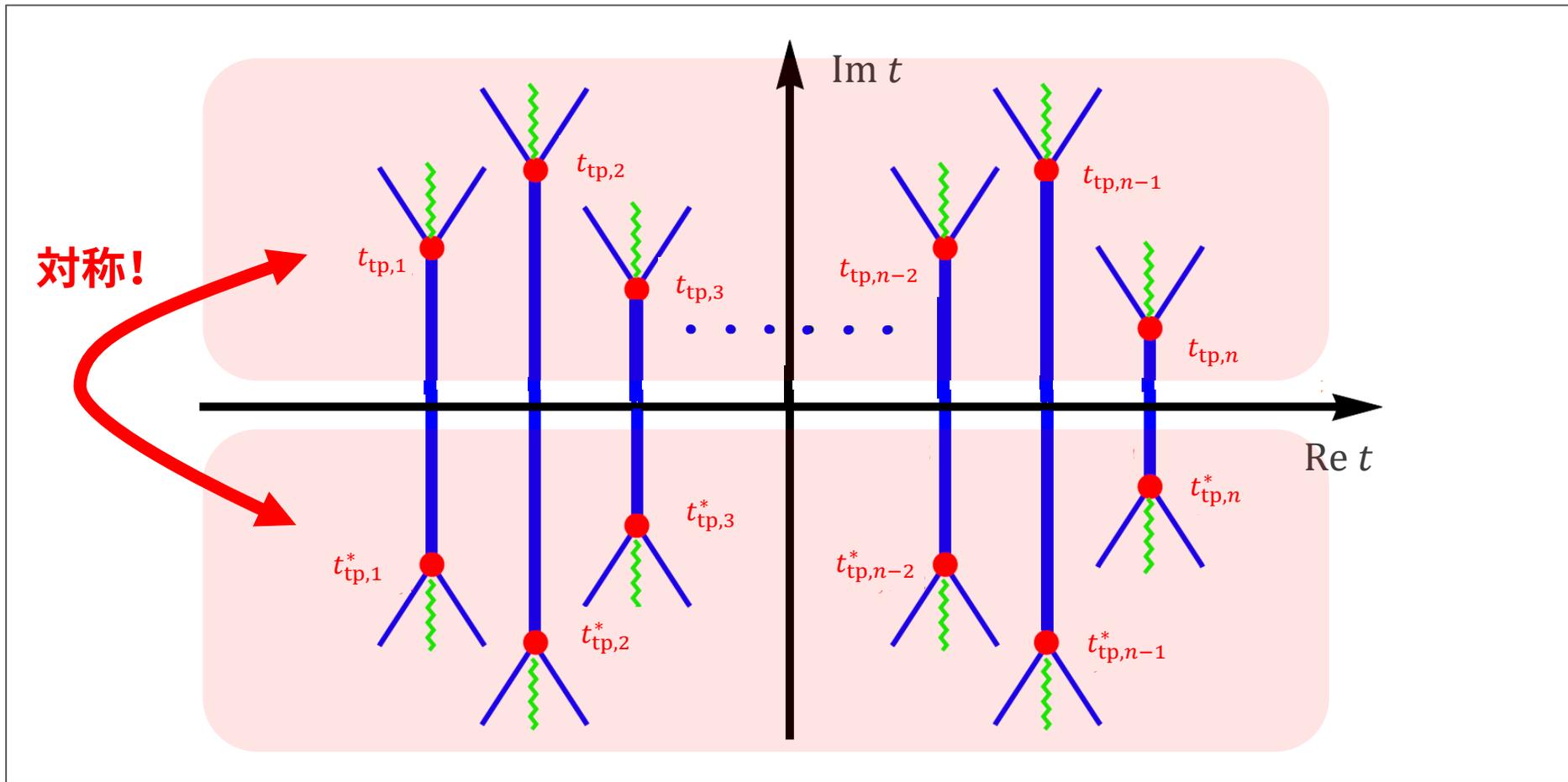
### 3. 完全WKB法の処方に基づき、生成粒子数の公式を求める

# Stokes図の同定



**[主張]** 仮定1-4を満たすとき、Stokes図はこのようになる。  
5つポイントがある。

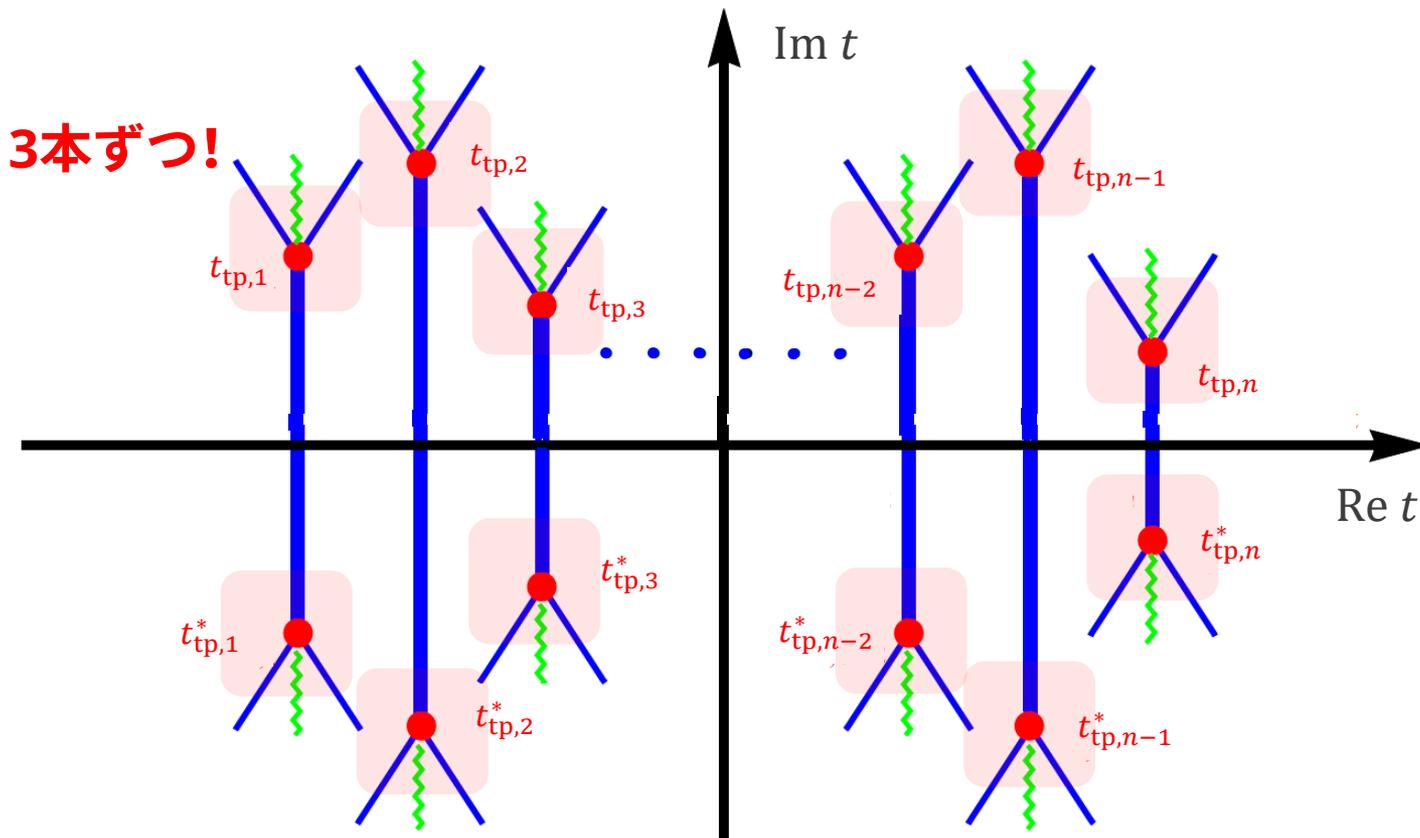
# Stokes図の同定: ポイント1



**[ポイント1]** Stokes図は上下対称(複素共役に対称)

$\because Q(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}$  (仮定3) なので、 $[Q(t)]^* = Q(t^*)$  (Schwarzの鏡像定理)  
 すると、 $0 = Q(t_{tp}) \Rightarrow 0 = Q(t_{tp}^*)$ ,  $z \in C_{t_{tp}} \Rightarrow z^* \in C_{t_{tp}^*}$  が従う

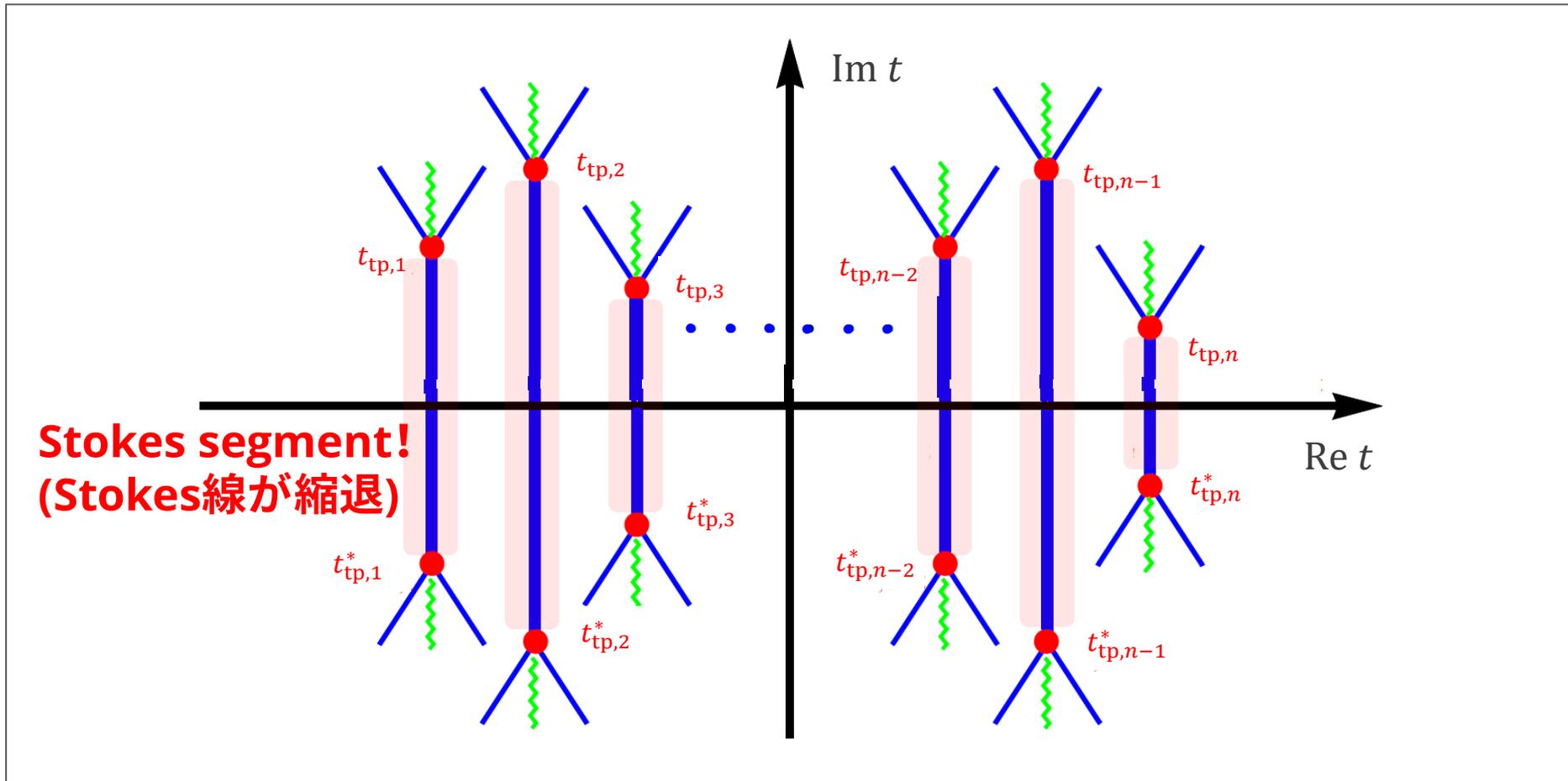
# Stokes図の同定: ポイント2



[ポイント2] 各変わり点からはStokes線が3本ずつ

- ∵  $Q'(t_{tp,i}) \neq 0$  (仮定4) なので、変わり点近傍ではAiry方程式と同じ  
Stokes線は途中で分裂したりしない

# Stokes図の同定: ポイント3

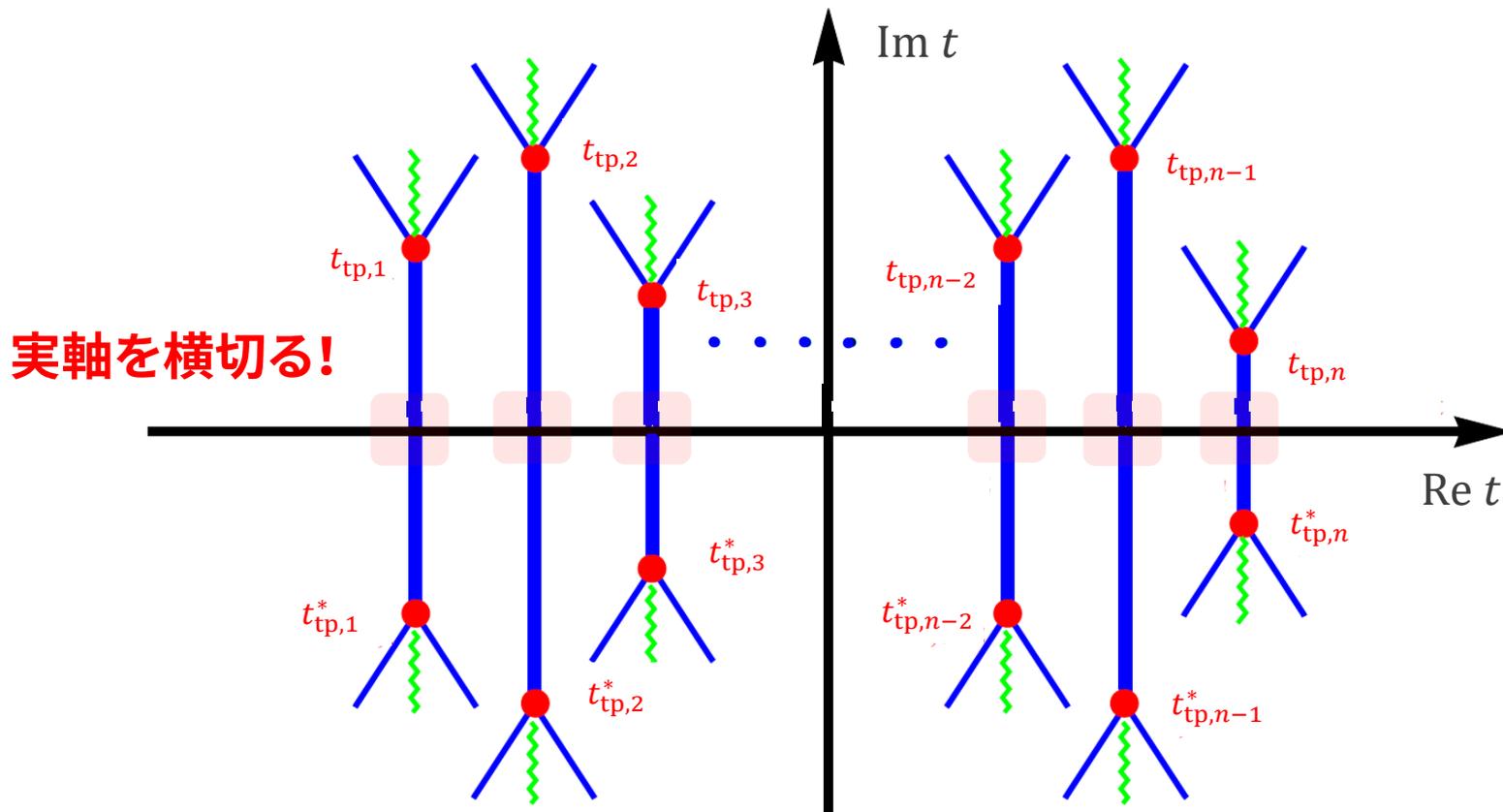


[ポイント3]  $t_{tp,i}$  と  $t_{tp,i}^*$  は Stokes segment で結ばれている

∵ 直感的には、上下対称(ポイント1)なので縮退

実際、 $[Q(t)]^* = Q(t^*)$  から  $0 = \text{Im} \left[ i \int_{t_{tp,i}}^{t_{tp,i}^*} \sqrt{Q(t')} dt' \right]$  が従うので縮退する

# Stokes図の同定: ポイント4

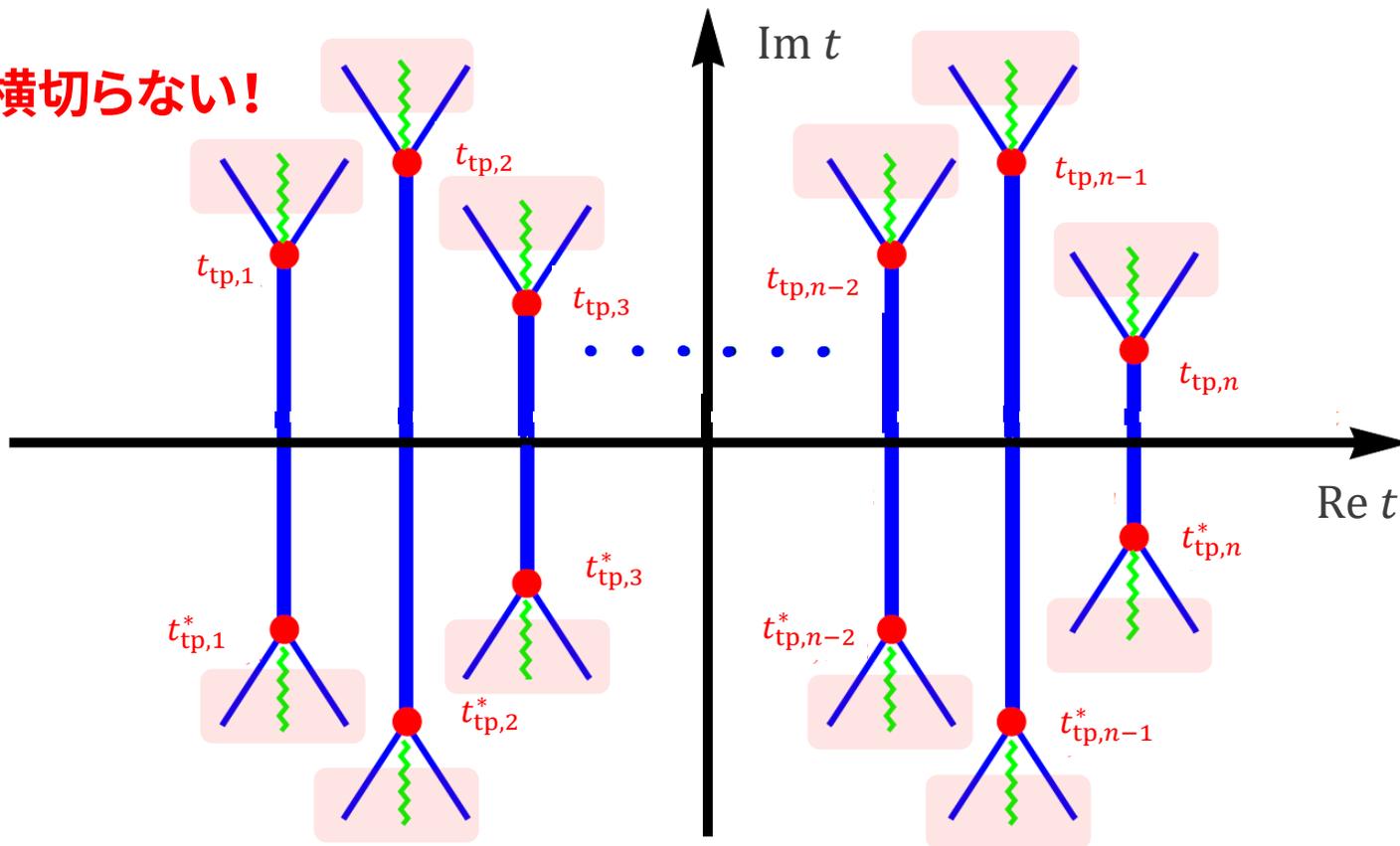


[ポイント4] Stokes segment は実軸を横切る

- ∴ トポロジ的に、実軸を挟む上下の点を連続な線で結ぶと、間にある実軸を通らざるを得ない

# Stokes図の同定: ポイント5

実軸を横切らない!

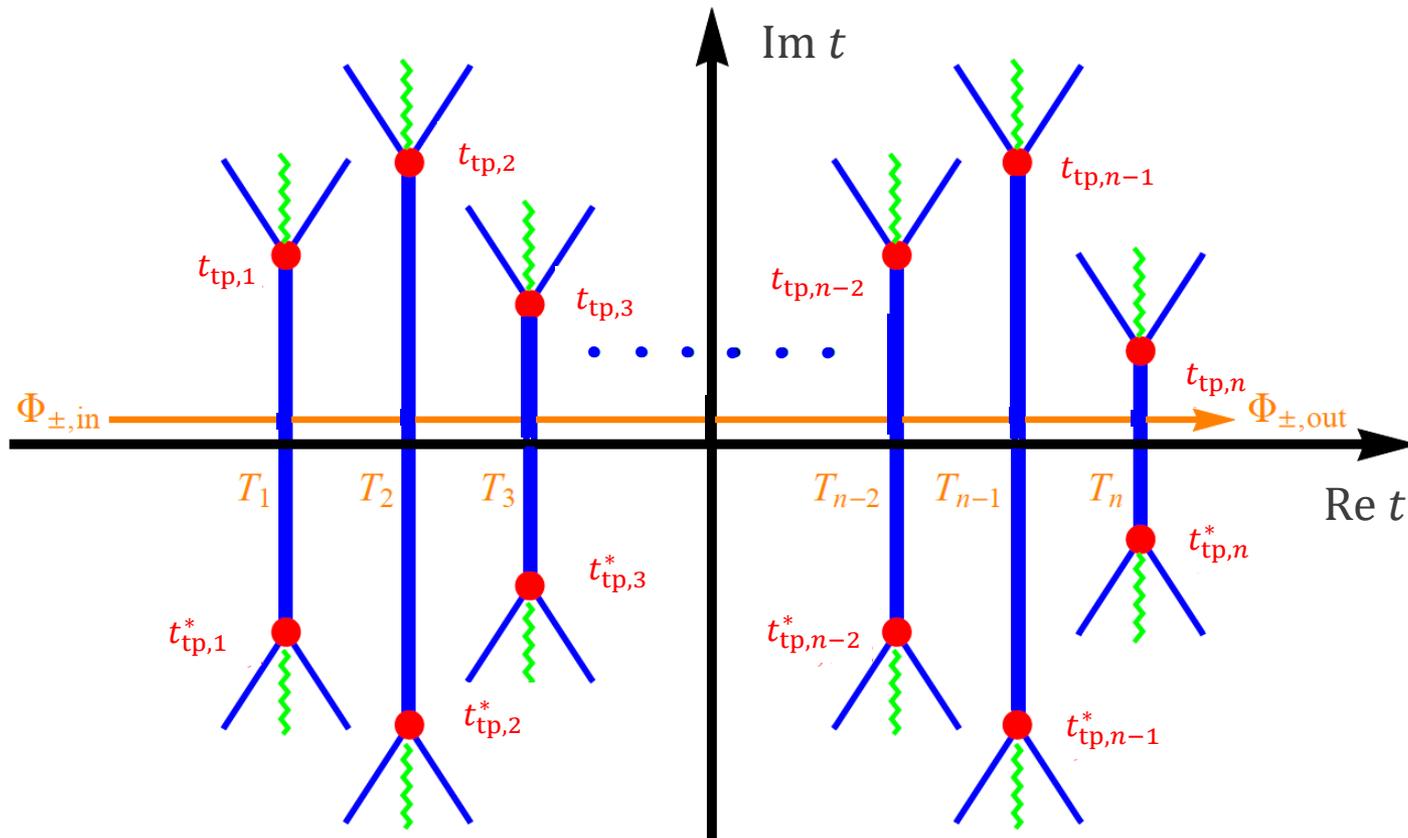


**[ポイント5]** Stokes segment 以外のStokes線は実軸を横切らない

∵ 横切るとすると、極がない(仮定2)ので、Cauchyの積分定理から

$$0 = \text{Im} \left[ i \int_{t_{\text{crossing } 1}}^{t_{\text{crossing } 2}} \sqrt{Q(t')} dt' \right] \text{ だが、これは } Q(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}^+ \text{ (仮定3) と矛盾}$$

# Stokes図の同定



**[主張]** 仮定1-4を満たすとき、Stokes図はこのようになる。

⇒ オレンジのpathを取ると、 $n$ 個のStokes segmentに当たる Stokes segmentでの接続行列を求める必要

# Stokes segment の接続行列

- 一般的な公式は存在しない

⇒ 半古典近似  $\hbar \ll 1$  (仮定5) と Airy型の接続公式(定理2) を使って導出

## 一般の場合

[Voros (1983)] [Aoki, Koike, Takei (1991)]

**[定理1]** 任意の2階常微分方程式に対し、WKB解はStokes線  $C_{t_{tp}}$  でStokes現象を起こす:

$$C_{t_{tp}} \equiv \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \left[ i \int_{t_{tp}}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right] = 0 \}$$

ここで、変わり点  $t_{tp}$  は  $0 = Q(t_{tp})$  となる点のこと。

**[定理2]** Stokes線を反時計回りに跨ぎ領域I→IIに移るとき、Stokes現象は以下で書ける:

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{II}} \\ \Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix} = T_{\text{Airy}} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{I}} \\ \Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad T_{\text{Airy}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \theta(-s) \times i e^{s\sigma_{t_{tp}}/\hbar} \\ \theta(s) \times i e^{s\sigma_{t_{tp}}/\hbar} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{t_{tp}} \equiv 2i \int_{t_0}^{t_{tp}} dt' \sqrt{Q(t')}, s \equiv \text{sgn}[\text{Re}[i \int_{t_{tp}}^{t \in C_{t_{tp}}} dt' \sqrt{Q(t')}] ]$$

**ただし**、(1)  $Q(z) = 0 + c(z - z_{tp}) + O(|z - z_{tp}|^2)$  ( $w/c \neq 0$ ) と振舞い、(2) "Stokes segment"がないこと、を仮定。Stokes segmentとは、Stokes線が縮退した線のこと。

## 完全WKB法による微分方程式のStokes現象の記述

1. Stokes図を書き下す

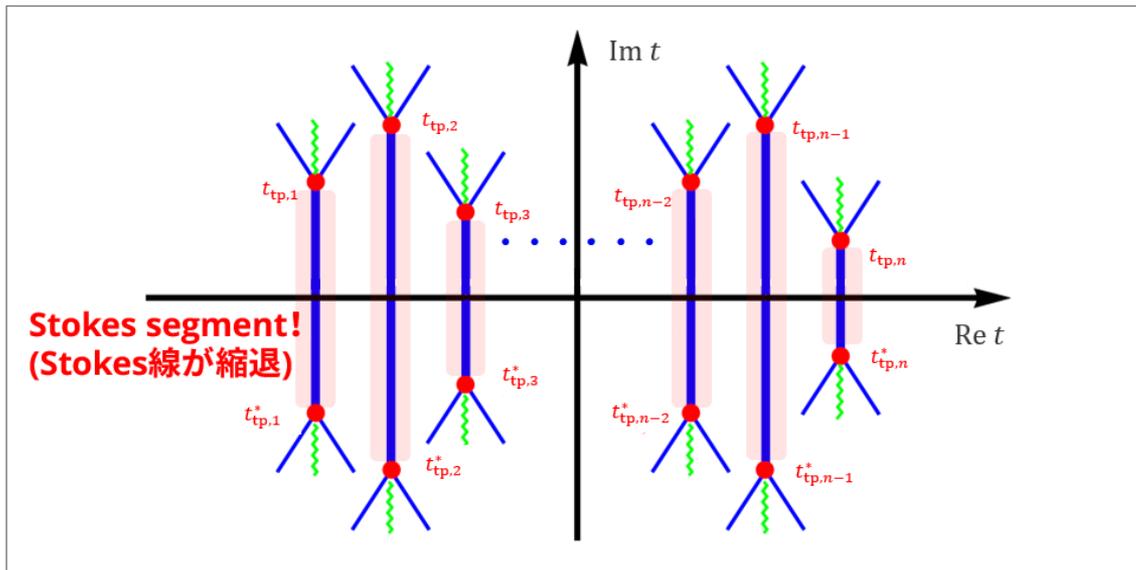
2. 関係を求めたい領域を結ぶpathを書く

3. pathに当たるStokes線の接続行列を全て掛ける:  $\begin{pmatrix} \Phi_+^B \\ \Phi_-^B \end{pmatrix} = T_1 T_2 \cdots T_n \begin{pmatrix} \Phi_+^A \\ \Phi_-^A \end{pmatrix}$

# Stokes segment の接続行列

- 一般的な公式は存在しない  
⇒ 半古典近似  $\hbar \ll 1$  (仮定5) と Airy型の接続公式(定理2) を使って導出
- 基本的なアイデア: Stokes segment は"対称性"から来ているので、対称性を壊す摂動を加えて縮退を解く

## Stokes図の同定: ポイント3



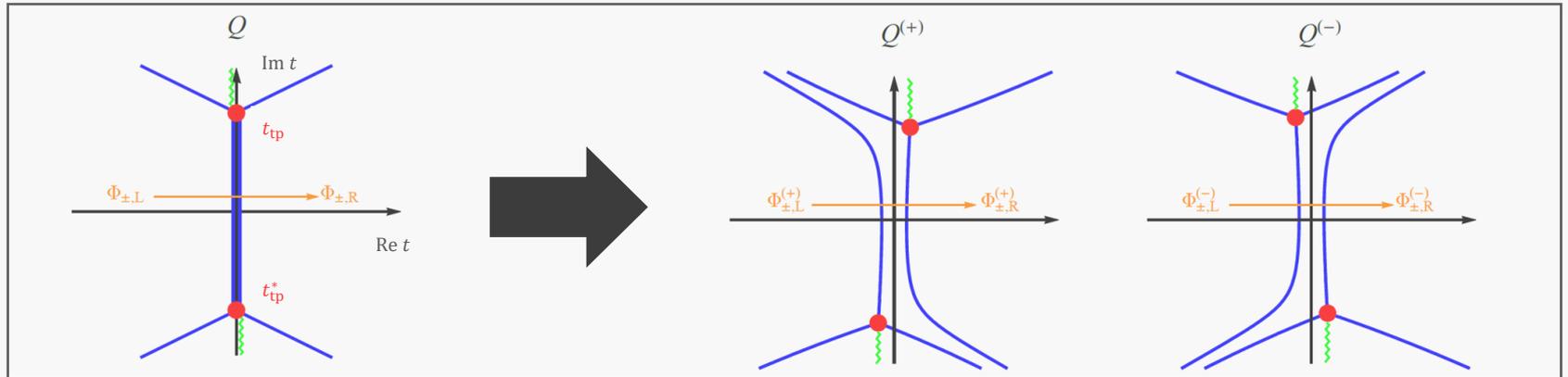
[ポイント3]  $t_{tp,i}$  と  $t_{tp,i}^*$  は Stokes segment で結ばれている

∵ 直感的には、上下対称(ポイント1)なので縮退

実際、 $[Q(t)]^* = Q(t^*)$  から  $0 = \text{Im} \left[ i \int_{t_{tp,i}}^{t_{tp,i}^*} \sqrt{Q(t')} dt' \right]$  が従うので縮退する

# Stokes segment の接続行列

- 一般的な公式は存在しない  
 $\Rightarrow$  半古典近似  $\hbar \ll 1$  (仮定5) と Airy型の接続公式(定理2) を使って導出
- 基本的なアイデア: Stokes segment は"対称性"から来ているので、対称性を壊す摂動を加えて縮退を解く
- $Q(t) \rightarrow Q(te^{\pm i0^+}) \equiv Q^{(\pm)}(t) \Rightarrow t_{tp} \rightarrow t_{tp}e^{\mp i0^+} \Rightarrow (t_{tp}, t_{tp}^*)$  は逆方向に動き縮退を解く

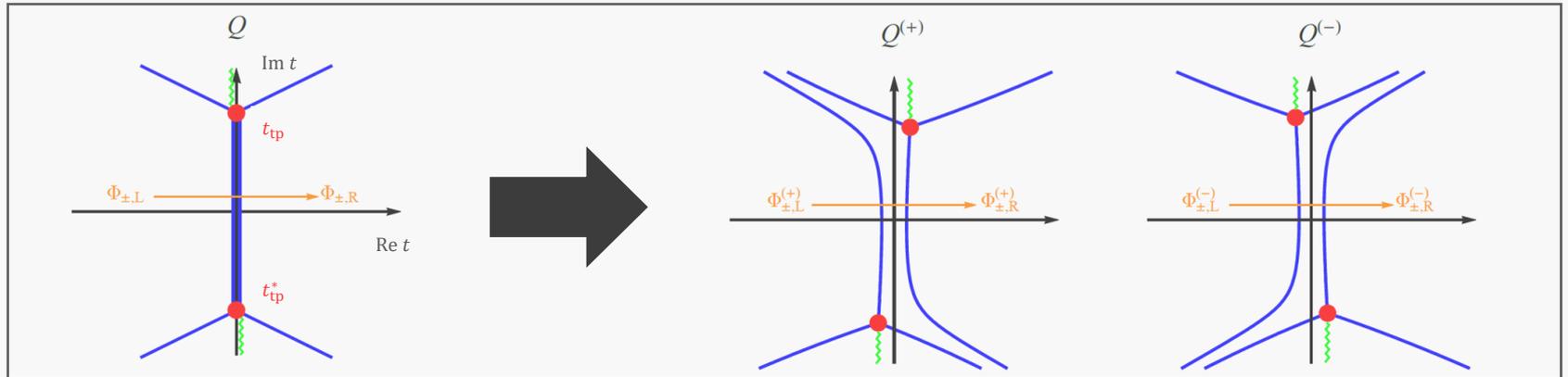


$$\Rightarrow T^{(\pm)} = \begin{pmatrix} T_{\text{Airy}, t_{tp}^*} T_{\text{Airy}, t_{tp}} & \\ T_{\text{Airy}, t_{tp}} T_{\text{Airy}, t_{tp}^*} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \mp \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} & -i e^{-i \text{Im} \sigma_{t_{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{tp}}/\hbar} \\ +i e^{+i \text{Im} \sigma_{t_{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{tp}}/\hbar} & 1 + \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \pm \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \end{pmatrix}$$

ここで、"インスタントン作用"  $S_{t_{tp}} \equiv \frac{\sigma_{t_{tp}^*} - \sigma_{t_{tp}}}{2} = +i \int_{t_{tp}}^{t_{tp}^*} dt' \sqrt{Q(t')} > 0$

# Stokes segment の接続行列

- 一般的な公式は存在しない  
 $\Rightarrow$  半古典近似  $\hbar \ll 1$  (仮定5) と Airy型の接続公式(定理2) を使って導出
- 基本的なアイデア: Stokes segment は"対称性"から来ているので、対称性を壊す摂動を加えて縮退を解く
- $Q(t) \rightarrow Q(te^{\pm i0^+}) \equiv Q^{(\pm)}(t) \Rightarrow t_{tp} \rightarrow t_{tp} e^{\mp i0^+} \Rightarrow (t_{tp}, t_{tp}^*)$  は逆方向に動き縮退を解く



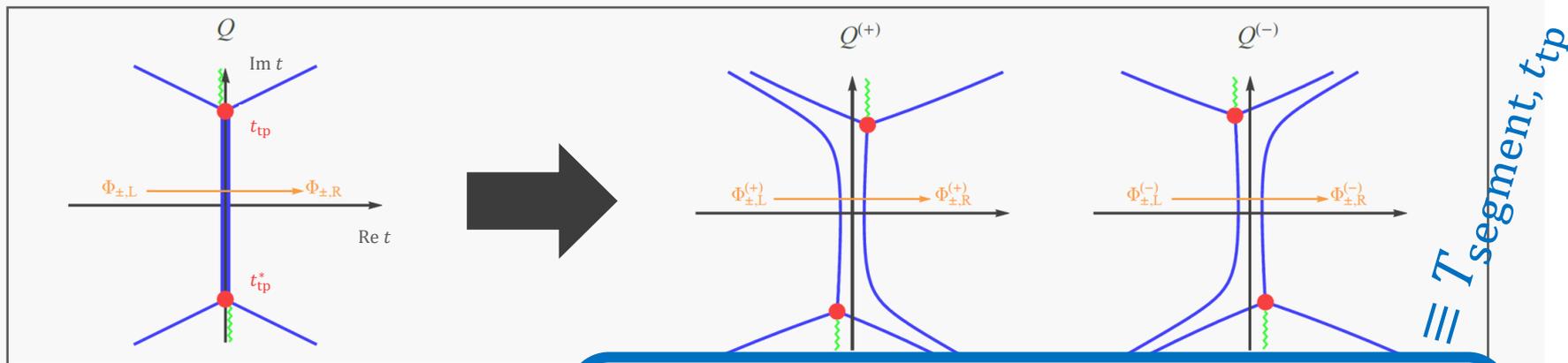
$$\Rightarrow T^{(\pm)} = \begin{pmatrix} T_{\text{Airy}, t_{tp}^*} T_{\text{Airy}, t_{tp}} & \\ T_{\text{Airy}, t_{tp}} T_{\text{Airy}, t_{tp}^*} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \mp \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} & -i e^{-i \text{Im} \sigma_{t_{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{tp}}/\hbar} \\ +i e^{+i \text{Im} \sigma_{t_{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{tp}}/\hbar} & 1 + \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \pm \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \end{pmatrix}$$

ここで、"インスタントン作用"  $S_{t_{tp}} \equiv \frac{\sigma_{t_{tp}^*} - \sigma_{t_{tp}}}{2} = +i \int_{t_{tp}}^{t_{tp}^*} dt' \sqrt{Q(t')} > 0$

- 半古典近似  $\hbar \ll 1$  では、対角項を無視でき、摂動  $\rightarrow 0$  の極限を well-defined に取れる

# Stokes segment の接続行列

- 一般的な公式は存在しない  
 $\Rightarrow$  半古典近似  $\hbar \ll 1$  (仮定5) と Airy型の接続公式(定理2) を使って導出
- 基本的なアイデア: Stokes segment は"対称性"から来ているので、対称性を壊す摂動を加えて縮退を解く
- $Q(t) \rightarrow Q(te^{\pm i0^+}) \equiv Q^{(\pm)}(t) \Rightarrow t_{tp} \rightarrow t_{tp} e^{\mp i0^+} \Rightarrow (t_{tp}, t_{tp}^*)$  は逆方向に動き縮退を解く

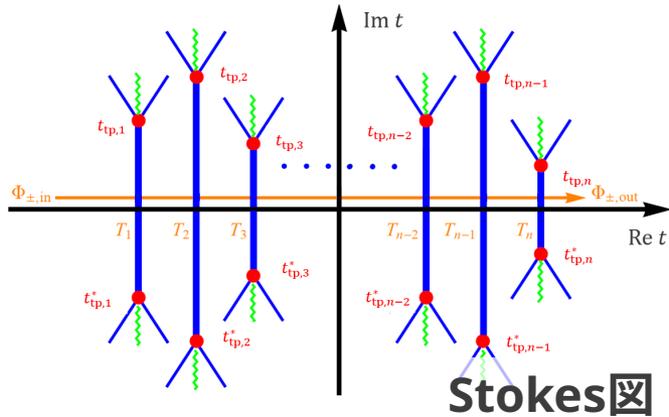


$$\Rightarrow T^{(\pm)} = \begin{cases} T_{\text{Airy}, t_{tp}^*} T_{\text{Airy}, t_{tp}} \\ T_{\text{Airy}, t_{tp}} T_{\text{Airy}, t_{tp}^*} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \mp \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} & -i e^{-i \text{Im} \sigma_{t_{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{tp}}/\hbar} \\ +i e^{+i \text{Im} \sigma_{t_{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{tp}}/\hbar} & 1 + \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \pm \frac{e^{-2S_{t_{tp}}/\hbar}}{2} \end{pmatrix}$$

ここで、"インスタントン作用"  $S_{t_{tp}} \equiv \frac{\sigma_{t_{tp}^*} - \sigma_{t_{tp}}}{2} = +i \int_{t_{tp}}^{t_{tp}^*} dt' \sqrt{Q(t')} > 0$

- 半古典近似  $\hbar \ll 1$  では、対角項を無視でき、摂動  $\rightarrow 0$  の極限を well-defined に取れる

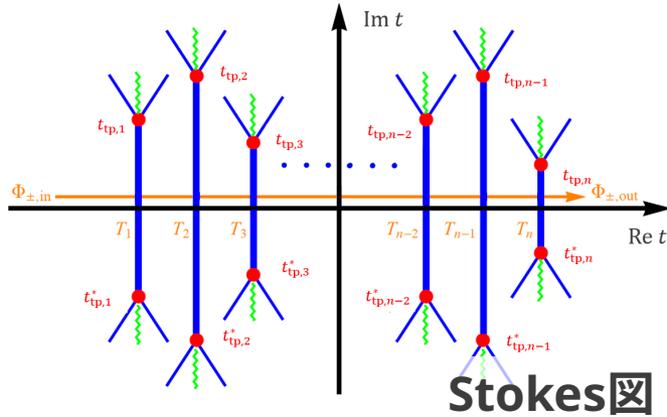
# メインな結果: 生成粒子数の公式



$$\begin{aligned}
 & T_{\text{segment}, t_{\text{tp}}} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp}}}/\hbar} \\ +ie^{+i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp}}}/\hbar} & 1 \end{pmatrix} \\
 & \quad + O(e^{-2S_{t_{\text{tp}}}/\hbar}) \\
 &= I_2 + \delta T_{\text{segment}, t_{\text{tp}}}
 \end{aligned}$$

接続行列

# メインな結果: 生成粒子数の公式



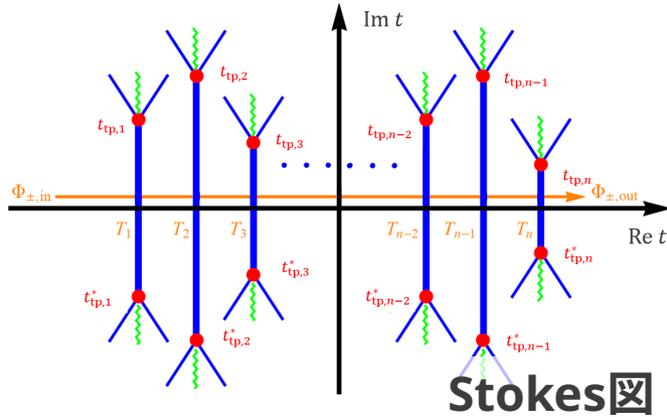
$$\begin{aligned}
 & T_{\text{segment}, t_{\text{tp}}} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp}}}/\hbar} \\ +ie^{+i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp}}}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp}}}/\hbar} & 1 \end{pmatrix} \\
 & \quad + O(e^{-2S_{t_{\text{tp}}}/\hbar}) \\
 &= I_2 + \delta T_{\text{segment}, t_{\text{tp}}}
 \end{aligned}$$

接続行列

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{out}} \\ \Phi_-^{\text{out}} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n T_{\text{segment}, t_{\text{tp}, i}} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{in}} \\ \Phi_-^{\text{in}} \end{pmatrix} = \left( I_2 + \sum_{i=1}^n \delta T_{\text{segment}, t_{\text{tp}, i}} + O(e^{-2S_{t_{\text{tp}}}/\hbar}) \right) \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{in}} \\ \Phi_-^{\text{in}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Bogoliubov係数は、 } \beta = \sum_{i=1}^n ie^{+i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp}, i}}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp}, i}}/\hbar} + O(e^{-2S_{t_{\text{tp}}}/\hbar})$$

# メインな結果: 生成粒子数の公式



$$\begin{aligned}
 T_{\text{segment}, t_{\text{tp}}} &= \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp}}/\hbar}} \\ +ie^{+i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp}}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp}}/\hbar}} & 1 \end{pmatrix} \\
 &+ O(e^{-2S_{t_{\text{tp}}/\hbar}}) \\
 &= I_2 + \delta T_{\text{segment}, t_{\text{tp}}}
 \end{aligned}$$

接続行列

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{out}} \\ \Phi_-^{\text{out}} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n T_{\text{segment}, t_{\text{tp},i}} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{in}} \\ \Phi_-^{\text{in}} \end{pmatrix} = \left( I_2 + \sum_{i=1}^n \delta T_{\text{segment}, t_{\text{tp},i}} + O(e^{-2S_{t_{\text{tp}}/\hbar}}) \right) \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{in}} \\ \Phi_-^{\text{in}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Bogoliubov係数は、} \beta = \sum_{i=1}^n ie^{+i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp},i}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp},i}/\hbar}} + O(e^{-2S_{t_{\text{tp}}/\hbar}})$$

## 完全WKB法による生成粒子数公式

$$n = |\beta|^2 = \left| \sum_{i=1}^n e^{+i \text{Im } \sigma_{t_{\text{tp},i}/\hbar} e^{-S_{t_{\text{tp},i}/\hbar}} \right|^2 + O(e^{-3S_{t_{\text{tp}}/\hbar}})$$

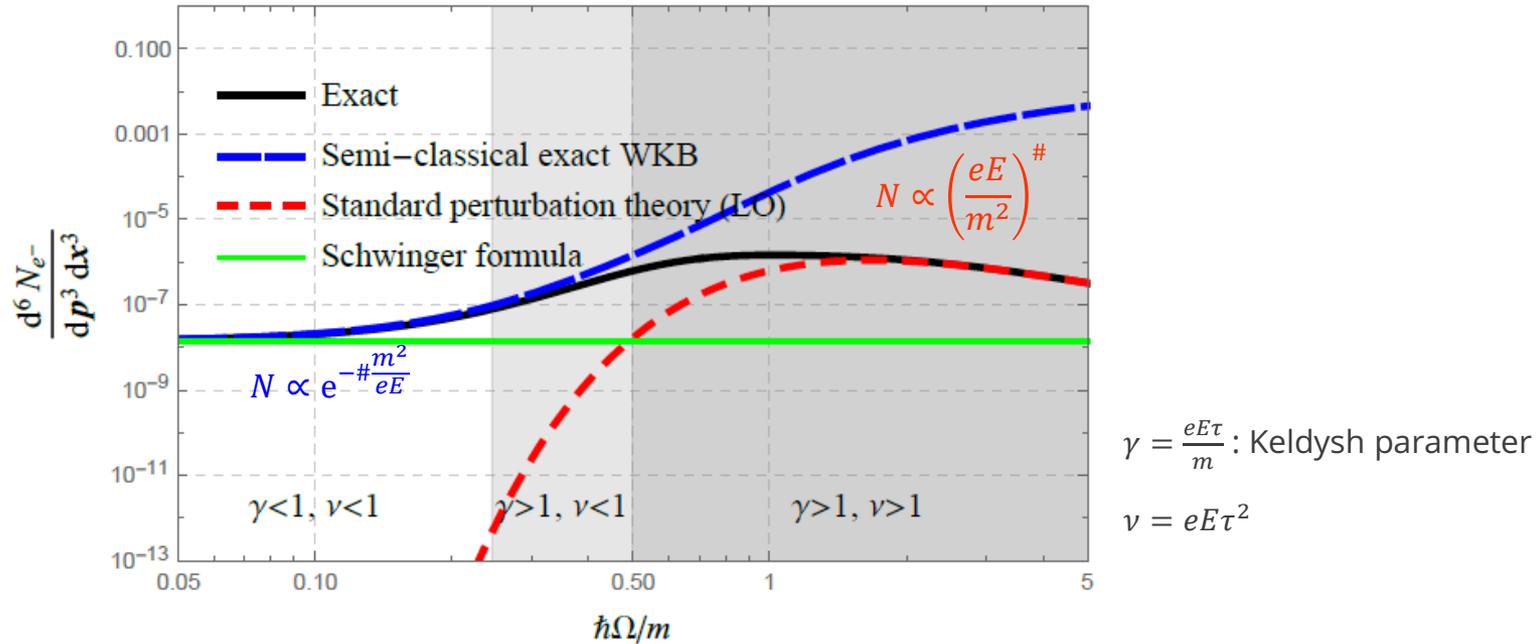
コメント1: 半古典近似  $\hbar \ll 1$  がOKな領域(=外場が十分に遅い)で正しい

コメント2: 他の半古典的手法 (worldline instanton法やDDP公式) と等価

Stokes現象を含む波動関数が求まることは(完全)WKB法のメリット  $\Rightarrow$  例: 高次高調波への応用

# コメント1: 適用領域

- Sauter電場におけるSchwinger機構:  $Q(t) = m^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + \left(p_\parallel - eE\tau \tanh(\Omega t)\right)^2$   
[Sauter (1931)] [HT, Fujii, Itakura (2014)]



- 半古典近似がOKな領域 ( $\hbar$ が小さい  $\leftrightarrow$   $\Omega$ が小さい) で確かに良い記述  
 $\Rightarrow \hbar$ はポテンシャルの"速さ"を制御:  $t \equiv \hbar\tau \Rightarrow 0 = [\partial_\tau^2 + Q(\hbar\tau)]\phi(\tau) \xrightarrow{\hbar \ll 1} [\partial_\tau^2 + Q(0)]\phi(\tau)$

# 内容

## 1. イントロダクション

- ・「強い場による真空からの粒子生成」のレビュー
- ・「完全WKB法」のレビュー

## 2. メインの計算の話

- ・粒子数公式の導出

## 3. まとめ

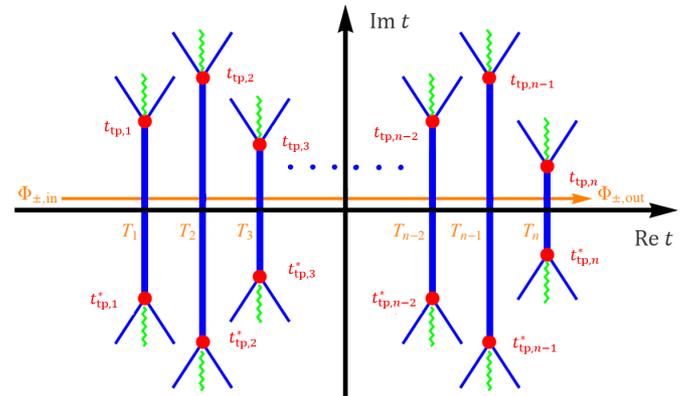
## 4. オマケ: 高次高調波発生への応用

# まとめ

[HT, Fujimori, Misumi, Nitta, Sakai, JHEP 03, 082 \(2021\) \[arXiv:2010.16080\]](#)

## 粒子生成は場の方程式のStokes現象と捉えられることに注目し、完全WKB法に基づいて粒子生成を調べた

- Stokes図の構造を一般的に同定
- Stokes segmentでの接続公式を半古典近似 $\hbar \ll 1$ で導出
- 生成粒子数の公式を導出



$$n = |\beta|^2 = \left| \sum_{i=1}^n e^{+i \operatorname{Im} \sigma_{t_{tp,i}}/\hbar} e^{-S_{t_{tp,i}}/\hbar} \right|^2 + O(e^{-3S_{t_{tp}}/\hbar})$$

### 将来的な課題

- 高次 $\hbar$ 寄与を取り込む(接続公式の改善)
- 非線形微分方程式、偏微分方程式への拡張
- Thimble積分との交流 (e.g., Tanizaki, Koike の実時間解析を完全WKB法で?)
- 波動関数を使っていろいろな量を計算したい

# 内容

## 1. イントロダクション

- ・「強い場による真空からの粒子生成」のレビュー
- ・「完全WKB法」のレビュー

## 2. メインの計算の話

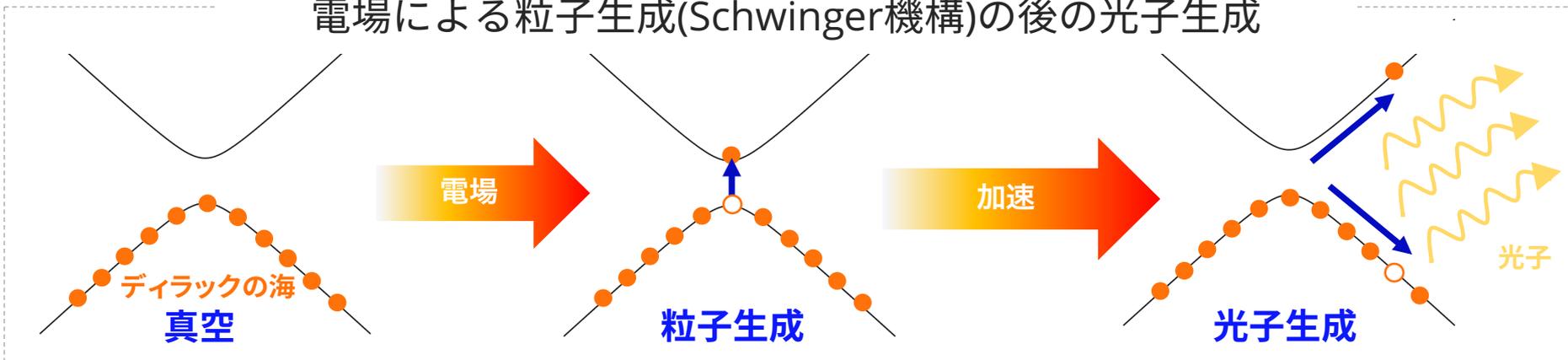
- ・粒子数公式の導出

## 3. まとめ

## 4. オマケ: 高次高調波発生への応用

# 真空からの高次高調波発生

電場による粒子生成(Schwinger機構)の後の光子生成



## ✓ 生成光子は、電場が強いつきに、高次高調波成分を持つだろう

[Ghimire et al., (2011)]

電場の典型的な周波数 $\Omega$ :  $\tilde{E}(\omega) \propto \delta(\Omega - \omega)$

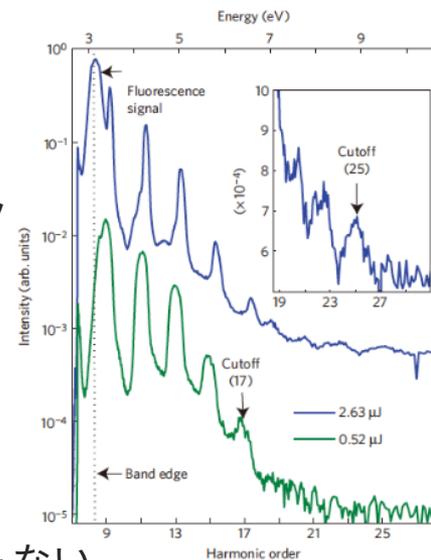
- $E$ が弱い/速い (large  $\gamma_{\text{Keldysh}}$ )  $\Rightarrow \omega \frac{dN_\gamma}{d\omega} = (\tilde{E}$ について線形)  $\Rightarrow \omega = 1 \times \Omega$  にピーク
- $E$ が強い/遅い (small  $\gamma_{\text{Keldysh}}$ )  $\Rightarrow \omega \frac{dN_\gamma}{d\omega} = (\tilde{E}$ について非線形)  $\Rightarrow \omega = n \times \Omega$  にピーク

## ✓ 半導体などでの観測

特徴: 奇数次の高次高調波  $n = 1, 3, 5, \dots$  & プラトー構造

## ✓ QEDでも同じことを期待するのは自然だが、まだ研究が未熟

- 半導体と同じレベルまで議論が進んでない。プラトーがどうかという議論もない
- オイラー-ハイゼンベルグ有効ラグランジアンの方法に依拠  
 $\Rightarrow$  電場の周波数ゼロ極限で正当化  $\Rightarrow$  本当に知りたい $\Omega \neq 0$ でも良いのか謎



[Piazza, Hatsagortsyan, Keitel (2005)]  
 [Fedotov, Narozhny (2007)]  
 [Bohl, Ruhl, King (2015)]

# 何を計算すればいいか

- ✓ カレントを計算したい ⇒ 電子の波動関数がわかっているだけで十分

$$\omega \frac{dN}{d\omega} \sim |\omega \tilde{j}(\omega)|^2 \quad \text{ここで} \quad J(t) := \langle 0; \text{in} | \hat{\psi} \gamma^\mu \hat{\psi} | 0; \text{in} \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_{-p} \gamma^\mu \psi_{-p}$$

$$\hat{\psi}(t, \mathbf{x}) = \int d^3 p \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} [\psi_{+p}(t) \hat{a}_p^{(\text{in})} + \psi_{-p}(t) \hat{b}_{-p}^{(\text{in})\dagger}] \quad \text{with B.C.} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_{\pm p} \propto e^{\mp i \omega_p t} = \text{plane waves}$$

- ✓ 電場中の波動関数は完全WKB法で構成できる

フェルミオンの場合も基本的にスカラーと同じように完全WKBができる

$$\psi_{-p}(t) = \left[ v_{p-eA} e^{+i \int^t \omega_{p-eA}} - \sum_n \Theta(t - t_n^{\text{CR}}) (-1)^n e^{-\frac{\sigma_n}{\hbar}} u_{p-eA} e^{-i \int^t \omega_{p-eA}} \right] \left( 1 + O(\hbar) + O(e^{-\frac{2}{\hbar} \text{Re } \sigma}) \right)$$

0<sup>th</sup> WKB (負振動解)
Stokes segment を跨いだ和
Stokes係数 (=Bogoliubov係数)
0<sup>th</sup> WKB (正振動解)

⇒  $\psi_{-p}$  を代入すれば、カレントは直ちに計算可能

# 結果1: ハーモニクス依存性

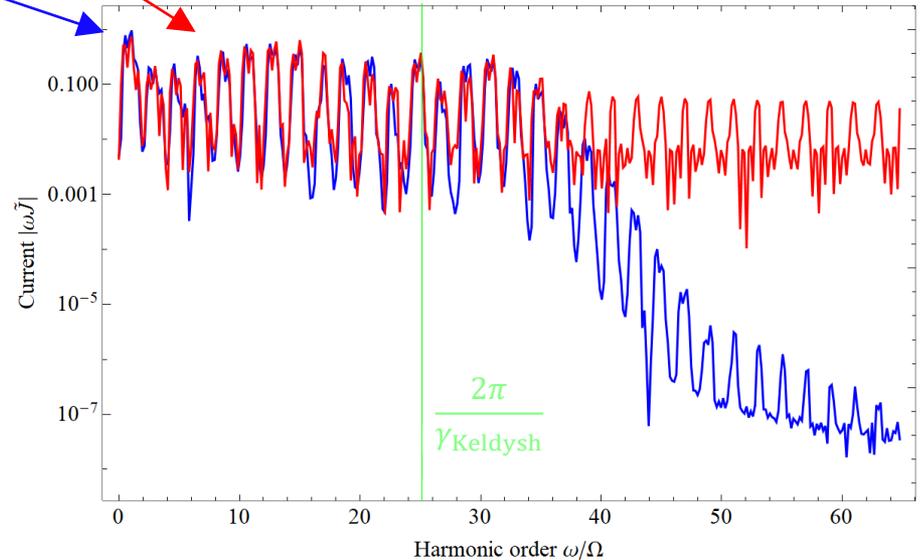
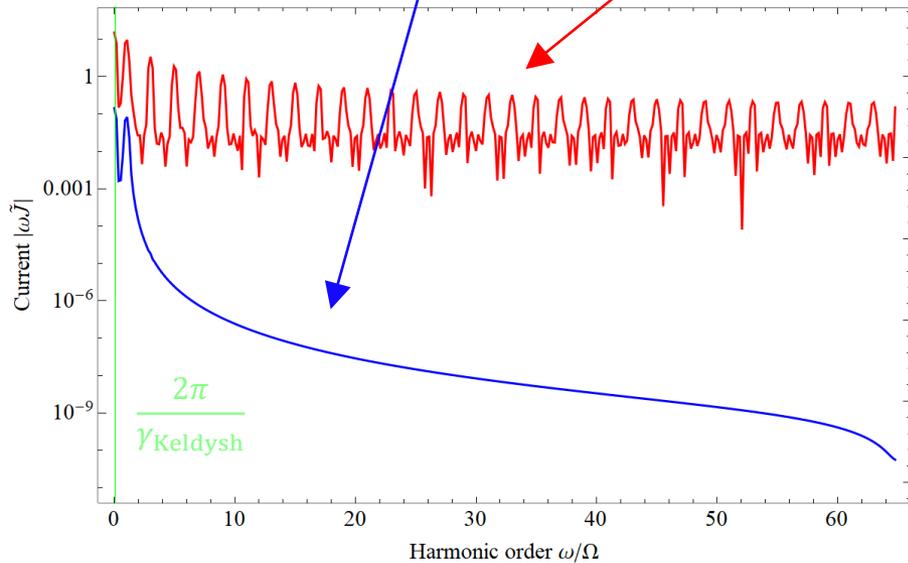
✓ コサイン電場  $E(t) = E_0 \cos(\Omega t)$  を当てた時のカレントの周波数スペクトル

数値計算  
(近似なしの厳密な結果)

WKBの結果 (半古典近似)

弱くて速い電場  $\gamma_{\text{Keldysh}} := \frac{m\Omega}{eE_0} = 100$

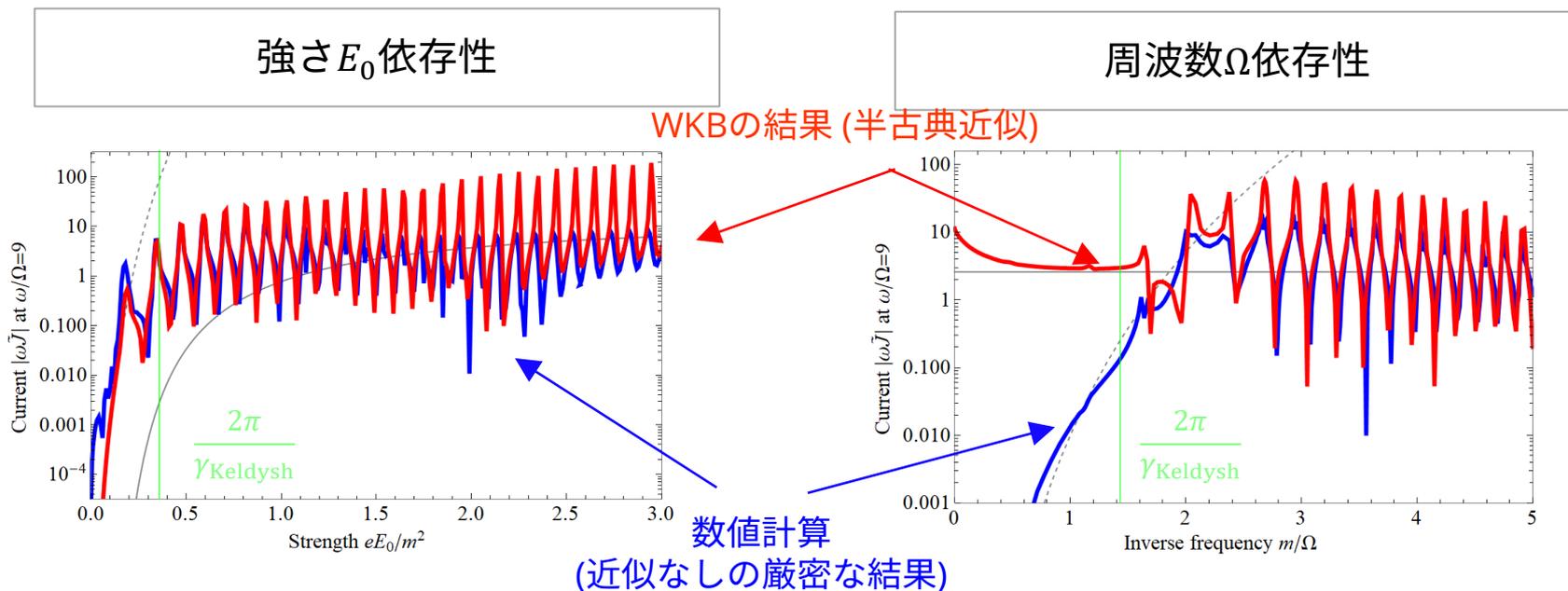
遅くて強い電場  $\gamma_{\text{Keldysh}} = 1/4$



- 電場が遅くて強い=非摂動的になるとたしかに高次高調波が出てくる  
⇒ 半導体などと同じように、QEDでも奇数次の高次高調波  $n = 1, 3, 5, \dots$  & プラトー構造
- WKBは非摂動的な領域で良い記述を与える  
⇒ プラトーは再現できるが、摂動的な物理が効きだすプラトーの端とかの記述は微妙

# 結果2: 電場の強さや周波数依存性

✓ ハーモニクスは $\omega/\Omega = 9$ に固定



• 非摂動的な領域 ( $E_0$ 大で $\Omega$ 小) では、フーリエ成分は、

- サチる  $\Rightarrow$  非摂動的な領域ではSchwinger機構がカレントを駆動するので、 $J \propto e^{-\# \frac{m^2}{eE}}$

- 振動する  $\Rightarrow$  物理的には、Stueckelberg位相による粒子生成の量子干渉効果の顕れ

$\Rightarrow$  最近の半導体での実験ともコンシステント [Xia *et al.*, (2020)]

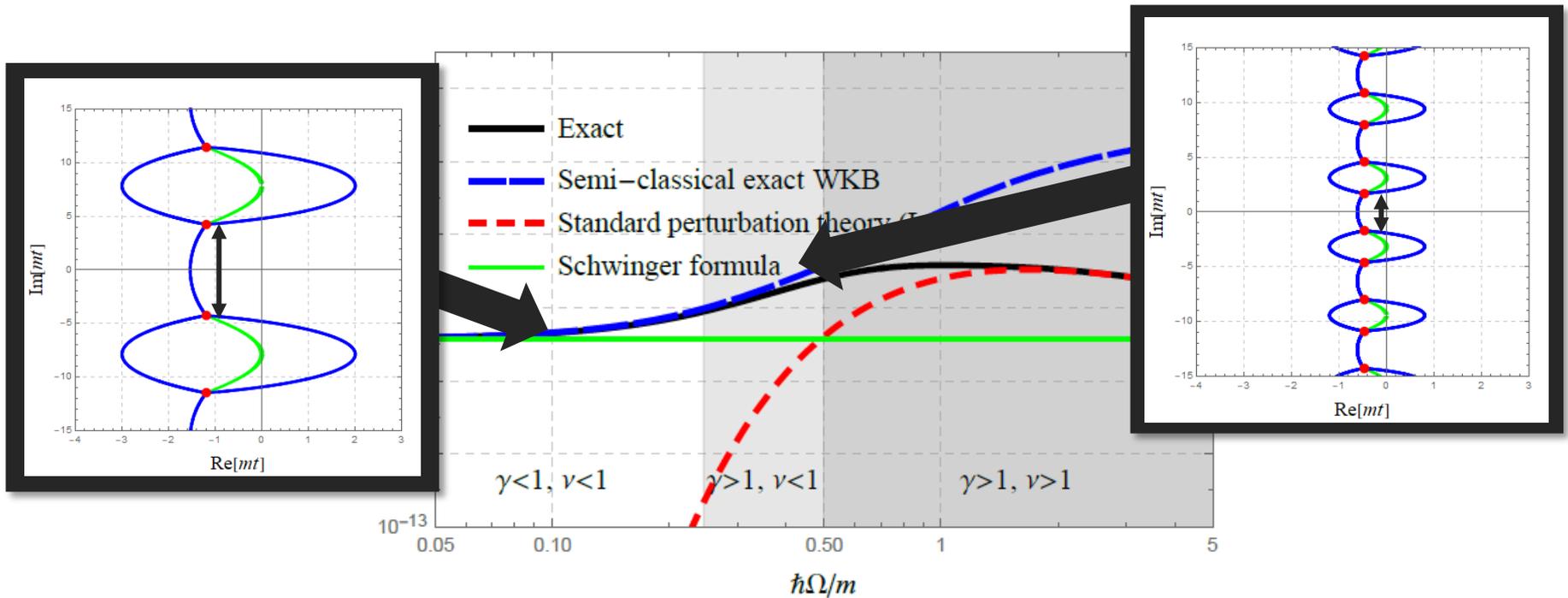
(ただし、 $E_0$ 依存性しか測ってなく、 $\Omega$ 依存性は我々の予言)

$\Rightarrow$  WKBで、非摂動領域の高次高調波発生を解析的にある程度理解できてうれしい



# コメント1: 適用領域

- Sauter電場におけるSchwinger機構:  $Q(t) = m^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + \left(p_\parallel - eE\tau \tanh(\Omega t)\right)^2$   
[Sauter (1931)] [HT, Fujii, Itakura (2014)]



- 半古典近似がOKな領域 ( $\hbar$ が小さい  $\leftrightarrow$   $\Omega$ が小さい) で確かに良い記述  
 $\Rightarrow \hbar$ はポテンシャルの"速さ"を制御:  $t \equiv \hbar\tau \Rightarrow 0 = [\partial_\tau^2 + Q(\hbar\tau)]\phi(\tau) \xrightarrow{\hbar \ll 1} [\partial_\tau^2 + Q(0)]\phi(\tau)$
- 大雑把に言えば、変わり点のペア間の距離が 遠い/近いと 非摂動的/摂動的  
(光電効果的)

# コメント2: 摂動/非摂動の移り変わり

- Schwinger機構を例に:  $Q(t) = m^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + (p_\parallel - eA(t))^2$
- 仮定: 電場がある周波数 $\Omega$ に集中している:  $A(t) = \int d\omega \tilde{A}(\omega)e^{i\omega t} \sim \tilde{A}(\Omega)e^{i\Omega t} + (\text{c. c.})$

- 変わり点は解析的に求まる:  $t_{\text{tp}} \sim \begin{cases} i \frac{m}{eE} & (\hbar \text{が小さい} \leftrightarrow \Omega \text{が小さい}) \\ 2i \Omega^{-1} \ln m & (\hbar \text{が大きい} \leftrightarrow \Omega \text{が大きい}) \end{cases}$

- “インスタントン作用”は、 $S_{t_{\text{tp}}} = +i \int_{t_{\text{tp}}}^{t_{\text{tp}}^*} dt' \sqrt{Q(t')} \sim m \text{Im}[t_{\text{tp}}]$ なので、 $t_{\text{tp}}$ のログ依存性の有無が**摂動/非摂動**の移り変わりで大事

$$n \sim \exp[-2S_{t_{\text{tp}}}/\hbar] \sim \#^{-2m/\Omega} \quad n \sim \exp[-2S_{t_{\text{tp}}}/\hbar] \sim e^{-\# \frac{m^2}{eE}}$$

# Intra- & Inter- バンドの寄与

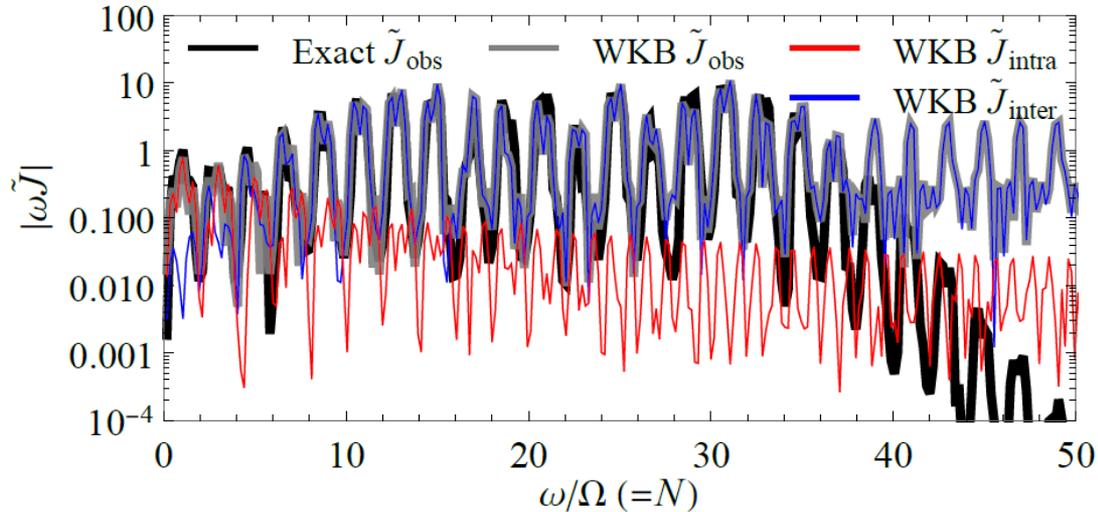


FIG. 2. HHG spectrum for the oscillating field (10), with  $\Omega/(\Delta/2) = 1/4$ ,  $eE_0/(\Delta/2)^2 = 1$  (i.e.,  $\gamma = 1/4$ ) and  $\Omega t_{\text{in}} = -17\pi/3$ ,  $T_w = 2|t_{\text{in}}|$ . The parameter set corresponds to, e.g.,  $\Omega/2\pi = 1$  THz and  $E_0 = 4.2$  kV/cm for a Dirac material with Fermi velocity  $v_F = 10^6$  m/s and mass  $\Delta = 33$  meV.

