

Schwinger 機構の基礎と発展 @ 早稲田大学高等研究所

田屋英俊

(hidetoshi.taya@riken.jp)

2022 年 8 月 1 日

概要

強い電磁場の下では、電磁場の強さが結合定数の小ささを補うことで、強い電磁場に特有の興味深い非摂動・非平衡現象が現れる。そのような現象の例として Schwinger 機構がある。Schwinger 機構によれば、真空を強い電磁場にさらすと真空は電子陽電子対を生成しながら崩壊する。Schwinger 機構の研究は場の理論の黎明期から始まる長い研究の歴史があるが、近年の実験技術の発展によって再び熱を帯びつつある。特に、レーザー技術の進歩によって Schwinger 機構を実現するような強力な電磁場を人工的に作ることが今まさに可能になりつつある。また、重イオン衝突や初期宇宙などのさまざまな極限状況においても強い電磁場が生成されていて、Schwinger 機構がなにがしかの現象論的な役割を果たしていた可能性が盛んに検討されている。このような Schwinger 機構の物理や理論的取り扱いの基礎と発展に関するいくつかのトピックについてレビューする。

目次

1	このノートについて	2
2	概論	2
2.1	物理的な描像	2
2.2	歴史	3
2.3	課題	11
3	外場中の場の量子論	12
3.1	正準量子化 (外場がないとき)	13
3.2	正準量子化 (外場があるとき)	17
3.3	粒子生成と真空崩壊	20
3.4	一様定常電場の場合	25
4	半古典近似	27
4.1	完全 WKB 法	28
4.1.1	普通の WKB 近似	28
4.1.2	Borel 総和法	30
4.1.3	具体例: Airy 方程式と Stokes 現象	31
4.1.4	一般の場合	37
4.1.5	Schwinger 機構への応用	38
4.2	半古典近似の公式からわかること	44
4.2.1	チェック: 定常電場の結果を再現すること	44
4.2.2	非摂動と摂動の移り変わり	45
4.2.3	量子干渉	47

5	実時間発展とバックリアクション	49
5.1	断熱粒子描像	49
5.2	平均場近似によるバックリアクションの取り扱い	54
5.3	UV 発散の処理	54
5.3.1	断熱正則化	54
5.3.2	くりこみ	59
5.3.3	エネルギー保存	61
5.4	典型的な時間発展	62

1 このノートについて

このノートは 2022 年 8 月 2 日に田屋が行う早稲田大学高等研究所での Schwinger 機構の 1 日レクチャーのために用意したものである。田屋の偏見に基づいたノートなので、嘘や間違いを含んでいる可能性があることを強調する (特に符号があやしいところが多々あるので、細かい計算は信じてはいけない)。余計なこともいろいろ書いてある。途中計算も無駄に詳しく書いたのどうさうさい。一方で、講義時間や準備の制約上、取り扱っている内容の範囲はかなり限られている。したがって、より深く/公平に Schwinger 機構のことを知りたい場合は、Schwinger 機構に関連したレビュー (博論も含む) として、文献 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] があるのでそちらも参考にすることを勧める。

2 概論

2.1 物理的な描像

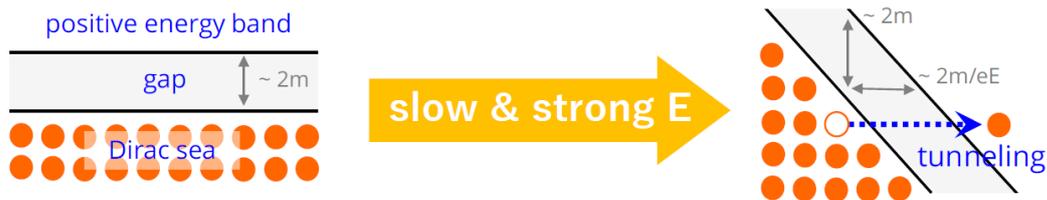


図 1: Schwinger 機構の直感的な描像.

端的に言えば, Schwinger 機構は量子トンネリングの一種である (図 1). Dirac の海の描像に立つと, QED の “バンド構造” は電場の下で歪んで, Dirac の海と正エネルギー帯がレベル交差を起こす. なので, 量子トンネリングによって Dirac の海に詰まっている電子が正エネルギー帯に逃げることができる. こうして電子陽電子の生成が起きる. 量子トンネリングは, 量子力学で習うように WKB 近似でいい感じに書いて, トンネル確率は $P \sim \exp \left[- \int_{\text{禁止帯}} dx \sqrt{V - E} \right] \sim \exp [-(\text{ギャップの高さ}) \times (\text{ギャップの長さ})]$ で与えられる. 今の場合, (ギャップの高さ) $\sim 2m$, (ギャップの長さ) $\sim 2m/eE$ で与えられるので, $P \sim \exp [-\#m^2/eE]$ のように m で指数関数的に抑制されたような粒子生成が起きる.

基本的な物理は以上だが, まじめに考えると Schwinger 機構の物理はいろいろと広がりがある現象的にも理論的にも楽しい. それを今回のレクチャーで議論したい.

2.2 歴史

Schwinger 機構の研究は 100 年近くの歴史がある。何がわかっていて何がわかっていないのかを少し明瞭にするために、個人的に大事だと思う文献を挙げながら歴史を概観する (必ずしも時系列順でない)。

- **1931 年: Sauter が強い電場中で粒子生成が起こることを予言。**

相対論的な量子力学に基づき粒子生成が起こることを予言した (ステップ関数型の電場やいわゆる Sauter 電場と呼ばれるパルス電場に対応するものを解析) [13, 14]. ちなみに, 相対論的な量子力学の Klein paradox の解決策として, この粒子生成機構が提案された [15].

- **1936 年: Heisenberg と Euler が定常電磁場中の有効ラグランジアンを求めた。**

相対論的な量子力学に基づいて, 定常電磁場中のフェルミオンの有効ラグランジアンを導出した [16]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{HE}} &= -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \left[(es)^2 \frac{\text{Re} \cosh(es\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})})}{\text{Im} \cosh(es\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})})} \mathcal{G} - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] + \mathcal{O}((eE/m^2)^6, (eB/m^2)^6). \quad (1)\end{aligned}$$

(最終行の電磁場について 4 次までの結果は Euler と Kockel によって前年に得られた [17].) ここで,

$$\mathcal{F} := \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad \mathcal{G} := F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (2)$$

Heisenberg と Euler は, \mathcal{L}_{HE} が虚部を持ち得ることを指摘し (ちゃんとした解析的な表式は得られていないと思う), それが (Sauter が指摘したような) 電磁場中の粒子生成と関係あるのではないか, という議論をしている. なお, Heisenberg-Euler Lagrangian \mathcal{L}_{HE} は, Schwinger 機構のみならず, 強い電磁場の物理を議論するときにもいろいろところで応用されている (例えば, 低エネルギー領域での光子光子散乱や複屈折など).

- **1951 年: Schwinger が場の量子論に基づいて Heisenberg-Euler の有効ラグランジアンを再導出し, 真空崩壊率を求めた。**

場の量子論に基づいて (proPERTIME 法と呼ばれるゲージ不変な正則化を開発することで), 定常電磁場中のフェルミオンの 1-loop ダイアグラムを計算することで Heisenberg-Euler Lagrangian \mathcal{L}_{HE} を再導出した. さらに, 電場成分が非ゼロのとき (より正確には, $\mathcal{F} < 0$, または, $\mathcal{G} \neq 0$) のときには, \mathcal{L}_{HE} が虚部を持つことを示し, その虚部を取ることで真空崩壊率を求めた [18]. つまり, $|\langle 0; \text{in} | 0; \text{out} \rangle|^2 = \exp[-2 \text{Im} \int d^4x \mathcal{L}_{\text{HE}}] = 1 - 2VT \text{Im} \mathcal{L}_{\text{HE}} + \mathcal{O}(|\mathcal{L}_{\text{HE}}|^2)$ から, $w := 2 \text{Im} \mathcal{L}_{\text{HE}} = \frac{-1}{VT} \ln |\langle 0; \text{in} | 0; \text{out} \rangle|^2$ が単位時間体積当たりの真空崩壊率と解釈でき¹, 特に一様定常電場に対し,

$$w = 2 \frac{eE^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[-n\pi \frac{m^2}{eE} \right] \quad (3)$$

¹うるさいことを言えば, この解釈は虚部 $\text{Im} \mathcal{L}_{\text{HE}}$ が小さいときのみ正しい (指数関数を開くときに $\mathcal{O}(|\mathcal{L}_{\text{HE}}|^2)$ をネグるので).

となることを“ちゃんと”示した. 初めて場の理論に基づいて粒子生成の定式化を与えたので, その貢献にちなんで, 「強い電磁場による粒子生成」²のことを「Schwinger 機構」(または, 元々の Sauter の貢献もリスペクトして「Sauter-Schwinger 機構」)と呼ぶことが多い.

Schwinger の公式 (3) で重要なことは, 電場 eE に対して非摂動的であることである (真性特異点になっているので $eE = 0$ 周りで Taylor 展開できない). つまり, 普通の摂動論の範囲では絶対に求めることはできない³. 物理的にも, 定常電場を構成する光子はエネルギー 0 であるはずだから, 無限個関与しないとどう頑張っても粒子生成を引き起こすような有限のエネルギーを供給することができず, 非摂動的にならざるを得ない.

なお, うるさいことを言えば, この時点で示されたことは「真空は電磁場中で崩壊する」ということであって, それが「電子陽電子対が生成している」ことによって引き起こされている, ということまではちゃんと示されたとは言えない. 粒子生成が起きていることを陽に確かめたのは, 後年の Nikishov の仕事だと思ふ. また, ラベル n が n ペアの粒子生成確率に対応する, という解釈をたまに見るがこれは誤りである⁴. 指数関数 $e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}$ の時点で既に n ペアの生成もすべて足し上げられている.

- 1969 年: Nikishov が Bogoliubov 変換の方法 (に対応する方法) に基づいて, Schwinger 機構によって生成される粒子数分布を計算した.

一様定常電場中の Dirac 方程式を解き Bogoliubov 係数 (に相当するもの) を求めることで, 粒子数分布,

$$\frac{1}{V} \frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp \left[-\pi \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE} \right], \quad (4)$$

を計算した [23]. つまり, 電場中で確かに粒子生成が起こることを陽に確かめた.

ここで, 単位時間体積あたりに生成される全粒子数,

$$\frac{N}{VT} = \frac{1}{VT} \sum_s \int d^3 \mathbf{p} \frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} = 2 \times \frac{|eE|^2}{(2\pi)^3} \exp \left[-\pi \frac{m^2}{eE} \right], \quad (5)$$

が単位時間体積あたりの真空崩壊率 w とは一致しないことを注意しておく (この点は後年に Cohen-McGady によって再考された [24]). 一般に, 真空崩壊率 w の最低次の $n = 1$ の項と生成率 N/VT が一致する. つまり, 弱電場 $m^2/eE \ll 1$ のときのみ $w \sim N/VT$ が成り立つ. 従って, 1 ループ有効作用を求める方法 (例えば, worldline instanton 法) では, 粒子生成数を求めること

²もっと正確には, 「定常電場による粒子生成」, またはちょっと拡大解釈をして, 「十分に遅い電場による粒子生成」, のことを Schwinger 機構と呼ぶのがより正確である. というのは, 電場がいくら強かろうが, 電場が早くなってくると, 物質での光電効果と同じように, 非摂動的なトンネリングではなく, 摂動的な粒子生成が支配的になるわけで, こういうのは単なる光子からの対生成であって, Schwinger 機構とは呼ばない. このノートでも本当は注意深く区別するべきだが, 推敲をちゃんとしていないので, あまり区別していないで書いて思う.

³Borel 総和法で摂動展開の総和を取ることで, Euler-Heisenberg Lagrangian \mathcal{L}_{HE} を摂動展開したものから, Schwinger の公式を再現する, ということは一応できる [19, 20]. 2-loop (に対しては積分系での有効ラグランジアンを表式が知られているので) に応用した仕事もある [21, 22]. しかしながら, うるさいことを言えば, これらの計算は現状では, 答えを非摂動的に知っている有効ラグランジアンを無理やり摂動展開してそれを総和したらなんか元の答えが出た, という以上の意味はないと思う.

⁴例えば, スカラー粒子の場合に真空崩壊率を計算すると, $(-1)^{n-1}$ という余計な位相因子が出てくる. なので, n ペアの確率解釈をしようとする, 偶数ペアの生成確率が負になって明らかに変.

は弱電場のときしかできない(し, そもそも1ループ有効作用の表式では運動量などのすべての量子数が積分されたものしか求まらないので, 運動量分布などの微分的な情報は本当は得ることができない).

これまで紹介したのはスピン1/2のフェルミオンに関する結果であるが, 1972年に, Marinov-Popovによって任意のスピンの場合への拡張も議論されている [25]⁵. その結果によれば, 一様定常電場の場合に関しては, スピン自由度は単に自由度を増やすだけで粒子生成量を変えない. つまり, 式(5)にあるスピン自由度の関連した因子2を $2s+1$ に変えれば良い. 一方, 磁場⁶があるときは粒子生成は陽にスピン依存する. 磁場があるときは, 横方向の運動がランダウ量子化, $m^2 + \mathbf{p}_\perp^2 \rightarrow m^2 + (2n+1)eB - 2s_\parallel eB$ (ここで, $s_\parallel = -s, -s+1, \dots, +s$ は磁場方向のスピン; n はランダウ準位のラベル), $\int d^2\mathbf{p}_\perp \rightarrow 2\pi|eB| \sum_{n=0}^\infty$ を受ける. その結果,

$$\begin{aligned} \frac{N}{VT} &= \frac{1}{T} \sum_{s_\parallel=-s}^s \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{(2\pi)^3} \exp \left[-\pi \frac{m^2 + (2n+1)|eB| - 2s_\parallel eB}{|eE|} \right] \\ &= (2s+1) \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp \left[-\pi \frac{m^2}{eE} \right] \times R. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで,

$$\begin{aligned} R &= \frac{N(B)}{N(B=0)} = \frac{1}{2s+1} \left| \frac{B}{E} \right| \frac{\sinh \left((2s+1) \left| \frac{\pi B}{E} \right| \right)}{\sinh^2 \left| \frac{\pi B}{E} \right|} \\ &\sim \begin{cases} 1 + \frac{(-1+4s(1+s))}{6} \left| \frac{\pi B}{E} \right|^2 & \left(\left| \frac{\pi B}{E} \right| \ll 1 \right) \\ \frac{1}{2s+1} 2 \left| \frac{\pi B}{E} \right| e^{(2s-1) \left| \frac{\pi B}{E} \right|} & \left(\left| \frac{\pi B}{E} \right| \gg 1 \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

である. スピン s が1より大きくて磁場が強いときには (Nielsen-Olesenの不安定性 [28, 29, 30]の名残のために) 指数関数的に粒子生成が大きくなっていることは興味深い [31, 32]⁷.

● 1970年: Brezin-IzyksonとPopovが時間依存する電場における摂動/非摂動的な粒子生成の移り変わりを半古典近似の範囲で議論

これまでの結果は定常電磁場に対するものであったが, 時間依存電場における粒子生成が Brezin-Izykson [33]とPopov [34, 35]によって独立に議論された^{8,10}. 半古典近似に基づいた計算を行う

⁵もう少し細かいことを言えば, Heisenberg-Euler Lagrangian \mathcal{L}_{HE} のスピン0への拡張は1936年にWeisskopfが [26], スピン1への拡張は1965年にVanyashin-Terentevがそれぞれやっている [27].

⁶正確には電場と同じ方向に向いた一様定常磁場. 一様定常なときには, 系を特徴づけるローレンツ不変量が \mathcal{F} と \mathcal{G} しかないので, ローレンツ変換をすることで電磁場が平行な状況に移っても一般性を失わない.

⁷田屋が知る限り, この爆発的増大はMarinov-Popov [25]が初めて指摘したものだと思うが, 彼らは爆発的な粒子生成は禁止されて然るべきなので磁場の強さに制限がかかる, という論理を展開している. 他方で, 丹治-板倉 [31]は, 定常電場があると粒子は無限に加速されて無限にエネルギーを得ることができるから, 不安定性を引き起こすタキオンモードは漸近状態で必ずいなくなるので, こういう爆発的な粒子生成はwell-definedである, という立場である. 一方で, そもそもこれらの結果はすべてバックリアクションを無視した計算であるが, 爆発的増大があるとそのバックリアクションを取り込まないといけないことは頭に留めておかないといけない. このときのバックリアクション問題はまだ誰もできていないと思う. 実時間発展を追うときには物理量を正しく正則化しないとダメだけれども, 不安定モードがあるときの正則化がよくわからない.

⁸Brezin-Izyksonの計算 [33]は, 物性物理でしばしば使われるDykhne-Davis-Pechukasの方法(DDP法) [36, 37]に他ならない(最近, 福嶋-島崎がLeftchetz thimbleの言葉で再考している [38]). Popovはimaginary-time methodという方法に依拠している [34, 35]⁹.

¹⁰このBrezin-Izyksonの結果は, 時間依存電場に対する最も重要な結果で, 今日に至るまでの理論計算でこれにとって

ことで電場の典型的な周波数 ω に応じて,

$$N \propto \begin{cases} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}} & (\gamma \ll 1) \\ (eE)^{2 \times 2m/\omega} & (\gamma \gg 1) \end{cases} \quad \text{with } \gamma := \frac{m\omega}{eE} \quad (8)$$

とスケールする, ということが議論された. ここで, γ は歴史的な経緯¹¹から Keldysh parameter と Schwinger 機構の研究では呼ばれる¹². 直感的には, m/eE がおよそそのトンネリング時間を与えるので, それを電場の典型的な時間スケール $1/\omega$ と比べたもの, と解釈できる. つまり, γ が小さいとトンネリングが起こる前に電場が変わってしまうので, 素朴なトンネリング描像が危うくなる. 電場が遅いときは, これまで見てきた公式のように粒子数は eE に対して非摂動的であるが, 電場が早くなると eE に対してたかだか冪の依存性しか持たない, つまり, 粒子生成は摂動論的になる, ということを意味している. 物理的には, 電場が早くなると, 物質における光電効果と同じように, 電場はインコヒーレントな散乱を起こす. このインコヒーレントな散乱は, 一回の散乱あたりに ω のエネルギーを真空に与えるだろうから, その粒子対生成のエネルギー閾値 $2m$ を与えるには $2m/\omega$ 回散乱すればよい. よって, 散乱振幅は $\sim e^{2m/\omega}$ となるはずなので, これを二乗したものが粒子対の生成確率を与えるのだ, と解釈される.

- 1975 年: Ritus-Lebetov が 2-loop の有効ラグランジアンを計算し, 高次ループ補正についての conjecture を提案した.

Schwinger の 1-loop の結果を Ritus-Lebetov が 2-loop に拡張した (dynamical photon のゆらぎが入って, 1-loop の間に photon propagator が飛ぶようなダイアグラムの寄与を計算した). 結果は複雑な 2 重積分の形になっていて, 一般の電場強度 eE/m^2 に対して簡単な形に書き直すことはできないが¹³, 電場が弱いとき $eE/m^2 \ll 1$ は, 有効ラグランジアンの虚部は,

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{L}_{\text{two-loop}} = 2 \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{e^2}{4} K_n + \mathcal{O}(e^4) \right) e^{-n \frac{\pi m^2}{eE}}$$

代わるような結果は得られていないと思う. その一方で, Brezin-Izykson の結果はいくつか不満足な点があることを強調しておく. ひとつは定量的に必ずしも良くないことで, 実際に数値計算や可解な電磁場ポテンシャルの結果と比較してみると, 摂動論的な領域 ($\gamma \gg 1$) の結果はあまり正しい結果と合致しない [39] (図 6 も参照). つまり, $\gamma \gg 1$ の領域の粒子生成は必ずしも半古典近似で計算できず, したがって, 半古典近似に依拠した Brezin-Izykson の議論は完全に信頼していいものか微妙なところがある. ふたつ目の点は, Brezin-Izykson の結果が正しいとすると, γ というひとつだけのパラメータだけで物理が決定されているわけで, これはとても不思議である. というのも, 今は系を特徴づけるパラメータが 3 つ (電場 eE , 質量 m , 周波数 ω) があるので, これを組み合わせると無次元量は 2 つ組める. つまり, 粒子生成は γ のみならず, なにかもう一つの隠れたパラメータによってもコントロールされて然るべきである. このあたりを真面目に議論している人がいるのか, 田屋はよく知らないが, 自分が考えてみた範囲だと, この隠れたパラメータは半古典近似の限界に関わっていて, それは高次のインスタント寄与と関係し普通の半古典近似の範囲ではどうしてもネグられてしまっているっぽい (例えば, 可解な Sauter 電場を使うと, それを陽に見ることができる [39]). また, この隠れたパラメータは, Brezin-Izykson が求めたような multi-photon の摂動論的な粒子生成から, もっと低次の one-photon の粒子生成の移り変わりを記述する上でのオーダーパラメータ的な役割を果たすので [40], ちゃんと取り込んだ計算ができると, より広い範囲の粒子生成が議論できてうれしいと思うが, これはまだ十分な理解が得られていない問題だと思う.

¹¹1965 年に Keldysh がイオン化の研究の文脈で似たようなことをやって, パラメータ γ に相当するものを初めて導入したため [41].

¹²レーザー物理の文脈では γ^{-1} のことを classical nonlinearity parameter と呼び, a_0 とか ξ の文字で表記されることが多い. 物理的には, レーザーが 1 周期 $T = 1/\omega$ で与えるエネルギー eE/ω を電子質量でスケールしたものと解釈される.

¹³Euclidean self-dual fields $F^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu}$ という特別な場合だと解析的な形に書き直せるらしい [42, 43, 44]. また, この積分表示を摂動展開してわしゃわしゃリサージェンスしたのが文献 [21, 22] の内容.

$$\sim 2 \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \left(1 + \frac{e^2}{4} + \mathcal{O}(e^4) \right) e^{-\frac{\pi m^2}{eE}} \quad (9)$$

となる¹⁴. ここで, $K_n = -\frac{m}{\sqrt{eE}}c_n + 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{eE}}{m}\right)$ で, $c_1 = 0, c_n = \sum_{k=1}^{n-1} 1/2\sqrt{nk(n-k)} \sim \pi/2\sqrt{n}$ ($n > 1$) である.

Ritus-Lebetov は高次ループの寄与は指数関数的な形でリザムできるのは, という conjecture も提案した (Ritus exponentiation conjecture):

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{L}_{\text{all-loop}} \stackrel{?}{=} 2 \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n \frac{\pi m_{\text{eff}}^2}{eE}} \sim 2 \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} e^{-n \frac{\pi \left(m - \frac{e^2}{4\pi} \frac{eE}{2m}\right)^2}{eE}}. \quad (10)$$

ここで, 有効質量 m_{eff} は,

$$m_{\text{eff}} = m + \frac{e^2}{4\pi} \frac{nc_n}{2} \sqrt{eE} - \frac{e^2}{4\pi} \frac{neE}{2m} + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\sqrt{eE}}{m}\right|^3\right) \xrightarrow{n=0} m - \frac{e^2}{4\pi} \frac{eE}{2m}. \quad (11)$$

($n = 0$ のときの) 有効質量 m_{eff} はクーロン相互作用の言葉ですっきり理解できる¹⁵: 粒子生成が起きた時, 電子陽電子のペアは典型的にはギャップの長さ $r \sim 2m/eE$ だけ引きはがされているだろうから, このペア間に働くクーロン引力ポテンシャルは $\delta m = -\frac{e^2}{4\pi} r \sim -\frac{e^2}{4\pi} \frac{eE}{2m}$. これはたしかに式 (11) の負の質量補正を再現する.

Ritus の conjecture は現在に至るまで証明されていない. というのも高次のループ計算はやはりとても難しく, 3-loop の計算すら人類は未だに成功していない¹⁶. が, worldline instanton 法で適当に弱電場の計算をスカラー QED でやると, 式 (11) の $n = 0$ とコンシステントな結果が得られるらしい [52].

● 1981 年: 真空崩壊するような外場中での摂動論の整備.

Dynamical な photon のゆらぎによる輻射補正を考えると, 普通の場合の理論の教科書でやる勉強する摂動論では, 真空は安定である, $|0; \text{in}\rangle = |0; \text{out}\rangle$, という暗黙の仮定のもとに散乱過程を議論する. 外場があって, 粒子生成が起きていると真空は不安定なので $|0; \text{in}\rangle \neq |0; \text{out}\rangle$, 真空の不安定性に注意しながら摂動論を組まないといけない. このとき真空の不安定性に起因する新しいプロセスも出てくる. 例えば, Schwinger 機構によって対生成された粒子からの光子生成など. このような不安定な真空中での摂動論は Fradkin-Gitman [53, 54] によって整備され

¹⁴式 (9) はフェルミオンの結果. K_n は $\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{eE}}{m}\right)$ をネグればスピンの依存しない. スカラーの場合は, n の和に位相因子 $(-1)^{n-1}$ を足して, スピン縮重度の因子を $2 \rightarrow 1$ に変えたものになる.

¹⁵現論文 [45] を読むと, ラベル n を残したまま解釈していて, n を一度に n ペアが生成される, という前提で解釈しているが, これは式 (5) の下で言及したように正しくないと思う. ただ, そういう解釈を強行することにすれば, n ペアあるのだったら, クーロン力の引力ポテンシャルは n 倍されるので, たしかに負の質量補正が n 倍されるのも自然に出てくる. また, 有効質量 (11) の 1 項目の正の補正は, $n > 1$ 個以上の生成が起きた時の電子同士の反発が効いてくる, という解釈も与えることができる.

¹⁶QED₁₊₃ だと無理だが, QED₁₊₁ ならある程度できるかも, という研究がある [46, 47]. しかし, 積分形を得ることはできるようなのだが, それはとても複雑で, そこから弱電場展開して展開係数を求めたりするのすら大変らしい. 違う高次計算のアプローチとして holographic な方法があるが [48, 49, 50, 51], 田屋はそれがどれくらいまっとうな結果なのかよくわからない.

た¹⁷. しかし, かなり形式的な議論にとどまっているので (だし, ノーテーションがダルすぎて文献 [53, 54] は読めたもんじゃない), これが実際に現象論的にどうか定量的な計算はこの時代には行われていなかったと思う.

- **1983年: 重イオン衝突の文脈でのバックリアクション問題の現象論的議論.**

これまでの議論は電磁場は背景場であって完全に手で固定されていた. これはエネルギー保存則を破っている. 粒子生成の元となるエネルギーのソースは, 親の電場から来ているので, 大量の粒子が作られたならば, その分のエネルギーが電磁場から抜けていないといけない. バックリアクション問題は, 田屋の知る限り, 重イオン衝突の文脈 (特に衝突直後のクォークグルーオンプラズマ生成と熱化過程) で議論されたのが初めてである [56, 57, 58]. しかしながら, 当時の議論は現象論の域を出ず, どれくらい妥当なのかが不明だった. 例えば, Boltzman 方程式のソース項に手で Schwinger 機構の効果を入れて, それを Maxwell 方程式と連立させる, みたいな計算をしていた.

- **1987年: Cooper-Mottola たちによるバックリアクション問題の場の理論的な取り扱い.**

Cooper-Mottola やその共同研究者たちによって, 場の理論に基づいたバックリアクションの理論が平均場近似かつ空間一様の電磁場の範囲内で完成し, その数値シミュレーションも実行された [59, 60, 61, 62, 63, 64]. もう少し具体的に言えば, Dirac 方程式と Maxwell 方程式を連立したものをセルフコンシステントに解いた:

$$\begin{cases} [i\cancel{\partial} - eA - m] \psi = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = \langle e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \rangle \end{cases} \quad (12)$$

ここで, 期待値 $\langle \dots \rangle$ を UV 発散が出ないように well-defined に定義する必要があるが, これは断熱正則化で処理された (断熱正則化はもともと曲がった時空での量子論の文脈で開発されたもの [55, 65]). 解いた結果, 電場は単なる減衰ではなくて減衰振動を見せることや, 量子干渉によって粒子分布が素朴なガウシアン的な分布から大きくズレたりすることが見出された¹⁸.

- 2000年以降に特別に重要な発展は個人的にはないと思う. しかしながら, 散発的に興味深そうなの/(なぜか) 流行っているアイデアが提案されていないこともないので, それをバラバラと眺めることにする.

- **2004年: Locally-constant-field approximation (LCFA) の導入.**

今までの計算はすべて空間一様であることを仮定していた. 空間が非一様な場合の Schwinger 機構も当然気になる場所である. そのような場合の Schwinger 機構を解析する1つのアプローチとして, Locally-constant-field approximation (LCFA) が Schwinger 機構の研究に導入された [82] (もともとは $e \rightarrow \gamma\gamma$ とか外場中の普通の散乱過程に対して用いられていたテクニックで [83, 84], 今日でも非常によく使われている一方で, その限界を突破することが1つの分野の大きな目標になっている). LCFA のアイデアは非常に単純で, 電磁場は十分に遅いと思って一

¹⁷Birrel-Davies の教科書 [55] の最後の章が不安定真空があるときの相互作用の効果だったので, たぶん曲がった時空の量子論の文脈だと既にたくさんこういうことは議論されてるはずだと思うけど, 田屋は詳しくない.

¹⁸この仕事以降にバックリアクション問題でさまざまな発展はないと思う. しかしながら, Wigner 関数の方法 (Dirac-Heisenberg-Wigner formalism; DHW formalism) [66, 67, 68, 69] や realtime lattice fermion を使ったシミュレーション法 [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81] などの新しいテクニックが開発されたりしてはいる.

様定常電場の結果 (3) や (4) に出てくる電場 E を手で時空間依存したものに変える $E \rightarrow E(t, \boldsymbol{x})$ ことで真空崩壊率や粒子生成数を求めよう, という方法である. これはもっとも原始的な近似ではあるが, 時空間に非一様電磁場へのこれを超えるような解析的アプローチは開発できていない. 時間だけに依存する場合は, Sauter 型の電場などの厳密解と比較することで LCFA の正当性を調べることができて, 半古典近似よりも全然狭いパラメーター領域しか記述できない [85, 86] (図 6 も参照).

- **2005 年: Worldline instanton method の開発.**

Worldline instanton 法と呼ばれるおしゃれな名前の半古典近似の方法が開発され, Brezin-Izykson の結果 [33] を再現した [87, 88, 89] (モノポール生成の文脈ではあったが, 一番初めに Schwinger 機構的なもの適用したのは Affleck-Avarex-Manton [52]). 雑に言えば, 外場中の場の量子論を 1 粒子の量子力学の問題に落として, 半古典近似の範囲内でその粒子のインスタント的な配位を調べることで粒子生成を計算する, という方法である. 半古典近似に依拠するので, 他のさまざまな半古典近似の取り扱い (WKB 法 [39, 90], phase-integral method [91, 92, 93, 94], divergent asymptotic series method [95, 96, 97], DDP 法 [98, 99, 100, 38, 39], imaginary-time method [101, 102, 103, 104] など) と結局同じ結果しか得られないので [39], 自分のやりやすい好きな方法を使えば良いと思うのだが, なぜか strong-field QED の文脈だと一番用いられているように見える.

- **2008 年: 光子生成に関する議論.**

Dynamical な photon を考慮すれば, Schwinger 機構が起きた後に荷電粒子が光子を吐くことができる. なので, Schwinger 機構を介して, 真空から光子生成が起こる. このような光子生成の過程が 2008 年ごろから今日に至るまで定量的に議論されるようになってきた [105, 106, 107, 108, 109]. が, 得られている結果は結構謎で再考の余地がある. 典型的に言われるのは, ソフトな光子が親の荷電粒子対ペアよりもはるかに大きい数生成されることが可能で, これは Schwinger 機構の観測量として使えるかも, というものなのだが, IR 発散をそもそも処理していないので, 物理的な結果なのか謎. 光子生成に関連して, Schwinger 機構を介在した高次高調波発生 [110, 111, 112, 109, 90] も議論されているが, 典型的に Euler-Heisenberg 有効作用に依拠したもので, それは $\omega \rightarrow 0$ の極限でしか正当化できないものだから, まじめに考える余地があると思う. 最近, 物性で固体の高次高調波発生 [113, 114] が盛んに議論されたりして, カットオフ則がどうたらとかいろいろなことが分かってきているように見えるが, そのレベルまで成熟していない.

- **2008 年: QED cascade の提案.**

バックリアクションの文脈で, dynamical な photon も含めて輻射補正を真面目に考えると, カスケード的に $e \rightarrow \gamma\gamma$ と $\gamma \rightarrow e\gamma$ の過程が繰り返り起こって, 輻射補正を完全に無視した平均場近似のものよりもはるかに速く電場が decay するのではないか, というアイデアが提案された [115, 116, 117]. 文献 [115, 116, 117] でやっているのは, 真空崩壊しないような電磁場の配位を持ってきて, そこに種となる親粒子を 1 個おいたときに, その親粒子がどうやって増えてゆくか, ということを議論している. ここで使っている散乱断面積なんかは安定な真空のときの LCFA の結果を適当に使ったものなので, Schwinger 機構のバックリアクション問題にどれくらい適用できるものなのか, ということに関しては真面目に考えないといけないが, まだできてい

ないのが現状だと思う¹⁹.

QED cascade は、物性物理、特に半導体、で言う [avalanche breakdown](#) に対応する。他方で、カスケードが効かなくて、Schwinger 機構による粒子生成だけで電場が decay する仕組みを [Zener breakdown](#) という。Avalanche breakdown はバンドギャップが大きい物質で起こる。ギャップが大きいと、粒子生成が十分に起きるまでにカスケードがたくさん起きるから²⁰。

● 2008 年: dynamically assisted Schwinger mechanism の提案.

一様定常電場に対する粒子生成は質量で強く抑制されている。現代の実験で実現できる電場の強さは、どうがんばっても $eE_{cr} := m^2$ よりも数桁落ちる。よって、Schwinger 機構を実験的に検証するのは厳しい。でも、なんとかして真空から粒子を作れないだろうか？ そのアイデアとして dynamically assisted Schwinger mechanism が Dunne-Schutzhold [128, 129] によって提案された。アイデアは一様定常電場 (あるいは遅い電場) に対して速い電場を重ね合わせる、というものである。速い電場は摂動的に粒子生成に関与することで、Dirac の海にいる粒子にエネルギーを与え、ギャップの中に粒子を励起する。すると、そのギャップの中からトンネリングによる粒子生成が起こると思えるので、そうすると普通の場合と比べれば短い距離をトンネリングすればよいので、粒子生成率は増えるだろう、というものである。

とても流行ったトピックではあるが、本質的には物性物理の文脈で 50 年以上も前から知られていた Franz-Keldysh 効果の QED 版である [130, 131, 132, 133, 134]。あるいは、strong-field QED で古くから議論されている、[外場中の non-linear Breit-Wheeler process](#) $\gamma \xrightarrow{\text{外場との non-linear な相互作用}} e^+e^-$ で、初期の光子 γ を古典場に置き換えた場合に過ぎない。なので、本質的には良く知られた現象で実はそんなに新しくない。また、dynamically assisted Schwinger mechanism で本当に大量の粒子を作るためには相当速い周波数の電場 $\omega \sim 2m$ を用意する必要があるが、こんなに早い電場を用意するのは実験的には厳しい (現状はたかだか $\omega = \mathcal{O}(1-10 \text{ keV})$)

● 2009 年: 量子干渉効果の発見.

複数のピークを持つ電場 (例: Subcycle 構造を持ったレーザー) など、粒子生成が何かも起きるような電場の配位に対して、それぞれの粒子生成イベントが干渉を起こすことで粒子数分布などの観測量が特徴的な干渉模様を示すことが数値計算で予見された [135]。すぐに後に半古典近似の計算によって Stokes 現象の言葉で理解できることが Dumlu-Dunne によって議論された [136, 137, 99, 99]²¹。物理的な理解としては以下の通りである: Dirac の海の描像に立つと、粒子生成が起こるということは、負エネルギー状態の粒子が正エネルギー状態に遷移した結果起こるわけである。負エネルギーの粒子の波動関数は $e^{+i \int^t dt' \omega_p(t')}$ (ここで、 $\omega_p = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}$ は電場中の 1 粒子エネルギー) と変化し、正エネルギーの粒子の波動関数は逆位相で変化する $e^{+i \int^t dt' \omega_p(t')}$ 。今、時刻 $t = t_1$ と $t = t_2 > t_1$ で粒子生成が起きたとすると、 t_1 で作られた粒子は t_2

¹⁹理論的に本当に真面目にやろうとすると、Kadanoff-Baym を真面目に数値的に解くしかないので見える。衝突項を 2PI 有効作用で決定したりするのが良くある方法だと思うが [118, 119, 120], 2PI だとゲージ不変性が保てないので [121, 122, 123, 124, 125], どれくらいまともな計算になるか謎。ちなみに 2PI から粒子生成や散乱過程も含むような Boltzman 方程式を導出しましょう、という研究が文献 [126] で行われたりした。2PI を使って QED を解きましょう、と頑張った博士学生がいたらしいが、なんか発散とかいろいろあつてうまくいかなかった、という博論を書いている [127]。

²⁰たぶん、このあたりのことを strong-field QED に人は知らないっぽいので、物性でやっているテクとかを導入すると、なんか楽しいことが言えるかも。

²¹逆に半古典近似を超える範囲でスッキリとした定式化はないと思う。半古典近似では扱えないような速い電場とかを考えると、素朴な半古典近似で予想されるものとは違うような効果も見えたりするかもしれないらしい [138, 139]。

までの時間の間に $e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt' \omega_p(t')}$ の位相を獲得する. 一方で, $t = t_2$ で生成される粒子は, $t = t_1$ から t_2 までの時間の間は負エネルギー状態なので, その時間の間に獲得した位相は $e^{+i \int_{t_1}^{t_2} dt' \omega_p(t')}$ である. よって, $t = t_2$ に粒子生成が起きた時, すでに時刻 $t = t_1$ で生成された粒子と波動関数の位相がズレている. この位相干渉によって粒子生成が destructive/constructive になるかが変わる.

この現象も元ネタをたどると, 物性の Landau-Zener 転移の文脈で 100 年近く前から知られている Stückelberg phase interference [140, 141] というものに対応する. 物性の他の文脈だと, 高次高調波発生のエッセンスだったりする [90]. 宇宙論でも preheating のときの broad resonance の文脈とかで良く議論されていると思う (例えば, Kofman-Linde- Starobinsky [142]).

- **2014 年: 断熱粒子描像や超断熱粒子描像に関する議論.**

これは曲がった時空の量子論の文脈で Parker とか偉い人が腐るほど議論した話題ではあるが [65], 実時間発展を記述するためにどのような粒子描像を設定するのが適当なのか, という問題が再考された [143, 144]. 得られた新しい物理は特にないと思うが, なぜか業界では結構注目を集めていて不思議.

- **2017 年: Furry picture の摂動論に基づいた Schwinger 機構の記述.**

電場が遅い (非摂動的) 成分と速い (摂動的) 成分に分割できるときには (例: dynamically assisted Schwinger mechanism), 遅い電場でドレスされた波動関数なりプロパゲータを使って, 速い電場は摂動的に扱うようなアプローチ (Furry picture の摂動論) が有効であると思われる. このような Furry picture の摂動論に基づいた Schwinger 機構の理論が整備され [134, 145, 146, 147, 148, 149], 半古典近似よりもはるかに良い記述を与えることが演示された.

2.3 課題

前節 2.2 で眺めたように, Schwinger 機構の研究は 100 年近い歴史があるので, 簡単どころは割とやられている印象がある. 一方で, まだよくわかっていない問題も多い. 例えば:

- **半古典近似を超える解析法:** 非定常な電場に対する方法として半古典近似が広く使われているが, 逆に言えば, まともに確立している方法は半古典近似しかない. 半古典近似の範囲だと遅い電場にしか使えないので, 中途半端な速さの電場とか, もっと広いパラメータに使える方法が欲しかったりする. また, 半古典近似の範囲内でも非自明なことはいろいろとあって, 例えば, 円偏光するような電場の場合には \hbar のカウンティングがバグるらしく, 素朴な半古典近似は使えなかったりする [150, ?]. あるいは, 高次のインスタントン寄与を真面目に計算して, それがどういう普通に速い電場による粒子生成とかに効くのか, みたいな議論は見たことがない.
- **空間非一様な場合の解析:** 空間非一様な場合の Schwinger 機構に使える計算は LCFA くらいしかない. 数値計算でがんばることもできるが, 必要なメモリが多いのでかなり大変. また, 空間非一様になった場合に断熱正則化は使えないので, 期待値の UV 発散やくりこみの処理をどうするかよくわからない.

- **輻射補正:** 現状できているのは 2-loop までの計算で、高次がどうなっているか誰も知らない。Ritus conjecture はあくまで conjecture で、本当に正しいのか/間違っているのかよくわからない。光子生成はなにか非自明な観測量を与える可能性があると思うが、現状では IF 発散すらまともに処理していないダメダメな計算しかないので、まじめに考えないといけない。
- **バックリアクション:** 平均場近似と断熱粒子描像の範囲でしかバックリアクション問題は定式化できていない。特に、平均場近似を超えたときに QED cascade とかが起こって非自明な効果を出すと思うが、どうやっていいかわからない。Kadanoff-Baym を解くのが一番まっとうなので、それをやりたいところだが、一般に衝突項がメモリ積分とかを含むのですごい大変だと思う。2PI でも良いけど、ゲージ不変性を破るので、そのあたりは慎重に考えないといけない。準粒子描像を認めて、Boltzman 方程式を使ってノリでやるのも一つの手だが、そのためにはそもそも真空が不安定なときの散乱振幅とかを真面目に計算しておかないといけない。
- **他の観測量:** 今までの研究では主に粒子生成数とかスペクトルとか真空崩壊率が議論されていたわけだが、別に他の観測量があっても良い。個人的には、スピン・カイラリティ生成とかに興味があるところだが [145, 151, 146], 他にもっとおもしろい観測量があるかもしれない。エンタングルメントとかブラックホールでどうたらやっているような量も計算できるはずなので、ブラックホールやる前にもっとわかりやすい Schwinger 機構でやとく、とかいうのは 1 つの方向性だと思う。
- **他分野から学ぶ:** Schwinger 機構なり strong-field QED の文脈で新しい発見に見えても、実は物性とか宇宙で 50 年以上前にそんなんやられてますよ、みたいなことが歴史上多々起きている。なので、他分野の強い場の物理ではどういうことがやられているのかをちゃんと知ることがまずは大事だと思う。逆に、strong-field QED の文脈で新しいテク/現象が発見されているかもしれないので、それを輸出すると、みんながハッピーになると思う。

3 外場中の場の量子論

(3 節で言いたいこと)

- 粒子生成の物理は Bogoliubov 変換の言葉で定式化でき、運動方程式を解いて Bogoliubov 係数を求める問題に帰着させることができる。
- 外場があるときは、モード関数の選び方に注意しないとイケなく、これは何を“粒子”と定義するか、ということに関わる。
- 真空崩壊率と粒子生成率は違う量。なので、真空崩壊率を求める方法 (例えば, worldline instanton 法とか) だと粒子生成率をちゃんと求めることは弱電場の極限とかじゃないとできない。

正準量子化や Bogoliubov 変換の方法に基づいて Schwinger 機構を議論する (丹治 [152] が非常に参考になる)。簡単のためにスカラー QED を考え、電磁場は空間一様な電場のみがある状況を考えることにする。スピン自由度は、電磁場が磁場成分を持っていたり偏極をしていたり、あるいは、量子干渉が大事になる状況でなければあまり重要になることはない。また、結合定数が弱い極限を考えて、

Schwinger 機構が起きた後の散乱過程とかは全部無視し、さらに、電磁場へのバックリアクションも無視する。つまり、ラグランジアンとして、

$$\mathcal{L} = |(\partial_\mu + ieA_\mu)\hat{\phi}|^2 - m^2|\hat{\phi}|^2 \quad (13)$$

を考える。ここで、 A_μ は電磁場だが、完全に古典的で外場として取り扱う。散乱過程を考えれば、 A_μ に量子ゆらぎを加える必要があるが、今回のレクチャーではまったく議論しない。バックリアクションを考えれば、電磁場の Maxwell 項を式 (13) に足して A_μ をダイナミカルにする必要がある。これは 5 節で議論する。

3.1 正準量子化 (外場がないとき)

外場中の正準量子化を議論する前に、外場がないときの普通の正準量子化を復習する。

(1) モード展開をする。

場の演算子 ϕ は Klein-Gordon 方程式を満たす:

$$0 = [\partial^2 + m^2] \phi. \quad (14)$$

この Klein-Gordon 方程式は空間並進に対して対称なので、場の演算子 ϕ を空間について Fourier 変換すると気持ちが良い:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\phi_{\mathbf{p}}(t) a_{\mathbf{p}} + \phi_{\mathbf{p}}^*(t) b_{-\mathbf{p}}^\dagger \right]. \quad (15)$$

ここで、モード関数 $\phi_{\mathbf{p}}$ は、

$$0 = \left[\partial_t^2 + \underbrace{m^2 + \mathbf{p}^2}_{:=\omega_{\mathbf{p}}^2} \right] \phi_{\mathbf{p}} \quad (16)$$

を満たす。この解は明らかに平面波であるから、

$$\phi_{\mathbf{p}}(t) = (\text{規格化因子}) \times e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} = \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \quad (17)$$

ととるのが“自然”である。ここで、規格化因子は原理的にはなんでも良いが、個人の趣味で

$$1 = +i\phi_{\mathbf{p}}^* \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}} \quad (18)$$

を満たすように選んだ。ここで、 $\overleftrightarrow{\partial}_t := \overrightarrow{\partial}_t := \partial_t - \overleftarrow{\partial}_t := \partial_t$ である。 $(\phi_1|\phi_2) := +i\phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2$ は、たまた Klein-Gordon 内積と呼ばれるが、これは ϕ_1, ϕ_2 がそれぞれが Klein-Gordon 型のモード方程式 (16) の解かつ $\omega_{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}$ である限り²²、保存量である: $\partial_t(\phi_1|\phi_2) = +i\phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_t^2 \phi_2 = +i\phi_1^*([\omega_{\mathbf{p}}^2]^* - \omega_{\mathbf{p}}^2)\phi_2 = 0$ 。この規格化条件から、

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}} \\ b_{-\mathbf{p}}^\dagger \end{pmatrix} = +i \int d^3\mathbf{x} \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \phi_{\mathbf{p}} \right)^* \\ - \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \phi_{\mathbf{p}}^* \right)^* \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi \quad (19)$$

²² $\omega_{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}$ の条件は不安定モードがあったりすると破れるので、規格化条件の置き方に少し注意が必要になる。例えばカラー磁場中のグルーオンなど。この場合は、グルーオンのスカラーと縦偏光モードを mix するような規格化条件を課す必要がある [153]。

と書けることが分かる. つまり, “係数 $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger$ ” は場 ϕ と平面波の内積を取ると得られる.

(2) 正準交換関係を課す.

場 ϕ に同時刻正準交換関係,

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad 0 = [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] = [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')], \quad (20)$$

を要請する. ここで, $\pi := \delta\mathcal{L}/\delta\dot{\phi} = \partial_t\phi$ は場 ϕ の正準共役な運動量である. モード関数 $\phi_{\mathbf{p}}$ の規格化条件 (18), あるいはそれから従う式 (19), より

$$\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^\dagger], \quad 0 = [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}] \quad (21)$$

を満たさねばならないことがわかる. この交換関係から, $a_{\mathbf{p}}/b_{\mathbf{p}}$ ($a_{\mathbf{p}}^\dagger/b_{\mathbf{p}}^\dagger$) が (なにがしかの) “粒子の消滅 (生成) 演算子” と解釈される. つまり, 今, 任意の \mathbf{p} に対して,

$$0 = a_{\mathbf{p}} |0\rangle = b_{\mathbf{p}} |0\rangle \quad \text{with } 1 = \langle 0|0\rangle \quad (22)$$

となるような状態 $|0\rangle$ を真空と定義し (規格化条件は原理的にはなんでも良いが, 個人の趣味で1になるように選んだ), 生成消滅演算子 $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}$ それぞれに対応した個数演算子は $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}$ と定義される. このとき, 真空に生成演算子 $a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}^\dagger$ を複数当てて作った状態,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{p}_1(n_1), \mathbf{p}_2(n_2), \dots, \mathbf{p}_k(n_k); \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \bar{\mathbf{p}}'_2(n'_2), \dots, \bar{\mathbf{p}}'_{k'}(n'_{k'})\rangle \\ & := \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots n_k!}} \left(\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \right)^{n_1} \left(\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \right)^{n_2} \dots \left(\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_{\mathbf{p}_k}^\dagger \right)^{n_k} \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{n'_1!n'_2!\dots n'_{k'}!}} \left(\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} b_{\bar{\mathbf{p}}'_1}^\dagger \right)^{n'_1} \left(\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} b_{\bar{\mathbf{p}}'_2}^\dagger \right)^{n'_2} \dots \left(\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} b_{\bar{\mathbf{p}}'_{k'}}^\dagger \right)^{n'_{k'}} |0\rangle, \quad (23) \end{aligned}$$

を考える. 状態を $\langle \dots | \dots \rangle = 1$ と規格化するために規格化因子 $\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} =: \sqrt{[\delta^3(\mathbf{p} = \mathbf{0})]^{-1}}$ がたくさん挿入されている²³. このとき,

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots, \mathbf{p}_k(n_k); \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots, \bar{\mathbf{p}}'_{k'}(n'_{k'}) | \left(\begin{array}{c} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \\ b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} \end{array} \right) | \mathbf{p}_1(n_1), \dots, \mathbf{p}_k(n_k); \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots, \bar{\mathbf{p}}'_{k'}(n'_{k'}) \rangle \\ & = \left(\frac{\sum_{i=1}^k n_i \frac{\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)}{\delta^3(\mathbf{0})}}{\sum_{i'=1}^{k'} n'_{i'} \frac{\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_{i'})}{\delta^3(\mathbf{0})}} \right) \quad (24) \end{aligned}$$

だから, 真空に生成演算子 $a_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{p}}^\dagger$ を複数当てて作った状態 $\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots, \mathbf{p}_k(n_k); \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots, \bar{\mathbf{p}}'_{k'}(n'_{k'}) |$ は, モード $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$ に $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ が作る粒子が (n_1, \dots, n_k) 個と $(\bar{\mathbf{p}}'_1, \dots, \bar{\mathbf{p}}'_{k'})$ に $b_{\mathbf{p}}^\dagger$ が作る粒子が $(n'_1, \dots, n'_{k'})$ 個が詰まっているような状態と解釈できる.

(3) モード関数 $\phi_{\mathbf{p}}$ の同定と生成消滅演算子 $a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}}$ の解釈.

場の理論の教科書を見ると, 大体上のように書かれていると思うが, 実は平面波を同定した式 (17) の

²³ $a_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^\dagger)^n |0\rangle = [\delta^3(\mathbf{0})(a_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n-1} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n-1}] |0\rangle = \dots = [n\delta^3(\mathbf{0})(a_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n-1} + (a_{\mathbf{p}}^\dagger)^n a_{\mathbf{p}}] |0\rangle = n\delta^3(\mathbf{0})(a_{\mathbf{p}}^\dagger)^{n-1} |0\rangle$ などとなることを使えば正しく規格化されていることが確かめられる.

ところで暗黙に仮定を置いていることに注意しないといけない。また、これまでの議論だけだと、演算子 a_p, b_p が一体全体どのような“粒子”を実際に作ったり殺したりしているのかよくわからない。

式 (17) において、 $\phi_p \propto e^{-i\omega_p t}$ とするのが自然と言ったが、これは実は非自明である。というのも、モード方程式 (16) は 2 階の微分方程式なので、独立解は 2 つ存在して、それは ϕ_p と ϕ_p^* である。つまり、一般的には、適当な定数 α_p, β_p による線形結合を考えて、

$$\tilde{\phi}_p = \alpha_p \phi_p + \beta_p \phi_p^* \quad (25)$$

をモード関数として選んでも原理的に何も問題はない (最も一般的には、 b_{-p}^\dagger の前にいるモード関数も必ずしも ϕ_p の複素共役である必要もないが、簡単のためにそういう状況は考えないことにする)。この新しいモード関数 $\tilde{\phi}_p$ に対する生成消滅演算子 \tilde{a}_p, \tilde{b}_p は、もともとの生成消滅演算子 a_p, b_p と異なる。実際、

$$\begin{aligned} \phi &= \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\tilde{\phi}_p \tilde{a}_p + \tilde{\phi}_p^* \tilde{b}_{-p}^\dagger \right] \\ &= \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[(\alpha_p \phi_p + \beta_p \phi_p^*) \tilde{a}_p + (\alpha_p \phi_p + \beta_p \phi_p^*)^* \tilde{b}_{-p}^\dagger \right] \\ &= \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\phi_p(t) (\alpha_p \tilde{a}_p + \beta_p^* \tilde{b}_{-p}^\dagger) + \tilde{\phi}_p^*(t) (\beta_p \tilde{a}_p + \alpha_p^* \tilde{b}_{-p}^\dagger) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

なので、

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_p \\ \tilde{b}_{-p}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p^* \\ \beta_p & \alpha_p^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p \\ b_{-p}^\dagger \end{pmatrix} \quad (27)$$

である。このように、モード関数の選び方に応じて生成消滅演算子、すなわち何を“粒子”と呼ぶか、ということも変わってしまう。つまり、“自然”だと思ってるモード関数の選び方、 $\phi_p \propto e^{-i\omega_p t}$ が自分の記述したい“粒子”をちゃんと定義しているのかを本当は真面目に考えないといけない。なお、式 (27) のように、とある生成消滅演算子の組を混ぜ合わせるような 1 次変換のことを Bogoliubov 変換と呼ぶ。

外場がないときに $\phi_p \propto e^{-i\omega_p t}$ とすると自然な粒子を定義できるのは、以下の理由による：外場がないときには系が時間に対する並進対称性を持ち、それに付随した量子数であるエネルギーが良い量子数である。したがって、1 粒子状態はエネルギーで一意的に区別できないといけない (1 粒子状態は複数のエネルギー状態の重ね合わせになってはいけない)。このことは、対応するモード関数が並進対称の演算子 $+i\partial_t$ の固有関数であることを要請する。つまり、粒子は正のエネルギー状態である (という風に人間は定義している) から、とある正の定数 $\lambda > 0$ が存在し、

$$+i\partial_t \phi_p = \lambda \phi_p \quad (28)$$

を満たせ、と要請する。なお、このとき、 ϕ_p^* は自動的に負エネルギー状態に対応するモード関数になるので、正しく反粒子を定義する： $+i\partial_t \phi_p^* = -(+i\partial_t \phi_p)^* = -\lambda \phi_p^*$ 。この条件の下でモード方程式 (16) を解けば、どうでもいい位相の不定性を除き $\alpha_p = 1, \beta_p = 0$ と定まり、したがって、外場がないときに $\phi_p \propto e^{-i\omega_p t}$ で $\lambda = \omega_p$ あることが分かる。

最後に、「対応するモード関数が並進対称の演算子 $+i\partial_t$ の固有関数になっている」ことと「1 粒子状態がエネルギーで一意的に区別できる」ということの対応を非自明に感じるかもしれないので、そ

れをより明白にするために、1粒子状態 $|\mathbf{p}(1)\rangle$ に対するエネルギーの期待値を計算してみる。(正準)エネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned}\hat{T}^{\mu\nu} &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial^\nu \phi) + (\partial^\nu \phi^\dagger) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \\ &= (\partial^\mu \phi^\dagger) (\partial^\nu \phi) + (\partial^\nu \phi^\dagger) (\partial^\mu \phi) - g^{\mu\nu} [(\partial_\rho \phi)^\dagger (\partial^\rho \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi]\end{aligned}\quad (29)$$

なので、

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}(1) | : \hat{T}^{00} : | \mathbf{p}(1) \rangle &= \langle \mathbf{p}(1) | : (\partial_t \phi)^\dagger (\partial_t \phi) + (\partial \phi)^\dagger \cdot (\partial \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi : | \mathbf{p}(1) \rangle \\ &= \int d^3 \mathbf{p}' d^3 \mathbf{p}'' \frac{e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{p}'}^* (\omega_{\mathbf{p}'} \omega_{\mathbf{p}''} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'' + m^2) \phi_{\mathbf{p}''} \langle \mathbf{p}(1) | a_{\mathbf{p}'}^\dagger a_{\mathbf{p}''} | \mathbf{p}(1) \rangle \\ &= \omega_{\mathbf{p}}\end{aligned}\quad (30)$$

となって、たしかにモード関数を $+i\partial_t$ の固有関数に選んだおかげで、1粒子状態 $|\mathbf{p}(1)\rangle$ が、 $+i\partial_t$ の固有値である $\omega_{\mathbf{p}}$ のエネルギーで特徴づけられていることが分かる。ここで、紫外発散は \bullet は正規順序化(例えば、 $: o_1 o_2^\dagger := o_2^\dagger o_1$ のように生成消滅演算子を右に持っていく順序化のこと)によって取り除いた。正規順序化は、物理的に興味のない真空の寄与を差引くことに対応することを注意しておく。つまり、任意の状態 $|*\rangle$ とバイリニアな演算子 $\phi^\dagger \Gamma \phi$ に対して、

$$\langle * | : \phi^\dagger \Gamma \phi : | * \rangle = \langle * | \phi^\dagger \Gamma \phi | * \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger \Gamma \phi | 0 \rangle \quad (31)$$

である。実際、

$$\begin{aligned}&\langle * | : \phi^\dagger \Gamma \phi : | * \rangle - \langle * | \phi^\dagger \Gamma \phi | * \rangle \\ &= \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}' \frac{e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times \left[\left\{ \phi_{\mathbf{p}}^* \Gamma \phi_{\mathbf{p}'} \langle * | a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} | * \rangle + \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}'} \langle * | b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} | * \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^* \Gamma \phi_{\mathbf{p}'}^* \langle * | a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}'}^\dagger | * \rangle + \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}'}^* \langle * | b_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}'} | * \rangle \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \phi_{\mathbf{p}}^* \Gamma \phi_{\mathbf{p}'} \langle * | a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} | * \rangle + \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}'} \langle * | b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} | * \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^* \Gamma \phi_{\mathbf{p}'}^* \langle * | a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}'}^\dagger | * \rangle + \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}'}^* \langle * | b_{-\mathbf{p}}^\dagger b_{-\mathbf{p}'} | * \rangle \right\} \right] \\ &= \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}' \frac{e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}'}^* \langle * | [b_{-\mathbf{p}}^\dagger, b_{-\mathbf{p}'}] | * \rangle \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}}^*\end{aligned}\quad (32)$$

であり、これを真空の寄与と比べると、

$$\langle 0 | \phi^\dagger \Gamma \phi | 0 \rangle = \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}' \frac{e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}'}^* \langle 0 | b_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}'}^\dagger | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{p}} \Gamma \phi_{\mathbf{p}}^* \quad (33)$$

だから確かに式(31)が成り立つことが分かる。なお、エネルギーだけでなく、同様に運動量 $\langle \hat{T}^{0i} \rangle$ や電荷 $\langle \hat{Q} \rangle$ ($\hat{Q} := +i(\phi^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi} \phi)$) の期待値を1粒子状態に対して計算してやれば、状態 $|\mathbf{p}(1)\rangle$ がエネルギー $\omega_{\mathbf{p}}$ 、運動量 \mathbf{p} 、電荷 +1 を持つような1個の粒子がいる状態であり、他方で、状態 $|\bar{\mathbf{p}}(1)\rangle$ がエネルギー $\omega_{\mathbf{p}}$ 、運動量 \mathbf{p} ²⁴、電荷 -1 を持つような1個の反粒子がいる状態であることが確認できる。まじめに物事を考えようとする、本当はこのようにいちいち1粒子状態の期待値を取ってその値を確認しないと、自分が考えている“粒子”がどういう励起に対応したものなのかよくわからない。

²⁴モード展開(15)の b^\dagger の運動量ラベルにマイナスが付いて $-\mathbf{p}$ となっているのは、期待値を真面目に計算したときに、反粒子の1粒子状態 $|\bar{\mathbf{p}}(1)\rangle$ がちゃんと $+\mathbf{p}$ の状態となるために必要。つまり、原理的には、モード展開に出てくる生成消滅演算子の運動量のラベルはなんでもいいのだけど、そうすると1粒子状態が正しい運動量を持たなくなる。

3.2 正準量子化 (外場があるとき)

外場があるときの正準量子化も基本的には外場がないときと同じように実行できる。しかしながら、外場があると一般には時間の並進対称性が壊れてしまうので、モード関数の同定が非自明になる。これが粒子生成の物理を記述する上でのエッセンスになる。なお、以下で展開する議論は形式的だが完全に非摂動的な議論なので、遅い電場に対する Schwinger 機構のみならず、どんな電場に対する粒子生成にも適用できる議論であることを言及しておく。電場じゃなくて、他の強い場による粒子生成や非断熱遷移などの議論にも同様の議論が展開できる。

まずは、モード展開をする。電磁場中の Klein-Gordon 方程式は、

$$0 = [(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 + m^2] \phi. \quad (34)$$

である。以降は時間ゲージ $A^0 = 0$ を取って $A_\mu = (0, -\mathbf{A})$ とする [$\mathbf{A} := (A^1, A^2, A^3)$ と上付きに対し \mathbf{A} を定義する]。電磁場は空間的に一様 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ だと仮定しているので、場の演算子 ϕ を空間について Fourier 変換すると、

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} [\phi_{\mathbf{p}}(t)a_{\mathbf{p}} + \phi_{\mathbf{p}}^*(t)b_{-\mathbf{p}}^\dagger] \quad (35)$$

で、対応するモード方程式は

$$0 = [\partial_t^2 + \underbrace{m^2 + (\mathbf{p}^2 - e\mathbf{A}(t))}_{:=\omega_{\mathbf{p}}^2}(t)] \phi_{\mathbf{p}} \quad (36)$$

である。外場がないときと同様に一般性を失うことなく

$$1 = +i\phi_{\mathbf{p}}^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}} \quad (37)$$

と規格化を選んでも良い。

次に、正準量子化を実行することで“粒子”を定義するわけだが、そのためには適切なモード関数 $\phi_{\mathbf{p}}$ は何なのか、ということを考えなければならない。今、非自明なのはモード方程式 (36) において時間並進対称性は陽に破れている。よって、外場がないときと同じように $+i\partial_t$ の固有関数になるようにモード関数 $\phi_{\mathbf{p}}$ を選ぶことは合理的でない。言い方を変えれば、エネルギーは良い量子数じゃなくなっている。エネルギーの固有状態となるように 1 粒子状態を定義するのは筋が悪い。そこで以下の対応を取る：

- (i) あきらめて漸近状態に逃げる：無限に電磁場をかけ続けることは物理的に不可能だから、仮に \mathbf{A} は無限の過去/未来 $t \rightarrow \pm\infty$ である定数値 $\mathbf{A}(\pm\infty)$ に漸近すると形式的に仮定する (一般に $\mathbf{A}(+\infty) \neq \mathbf{A}(-\infty)$)。すると、無限の過去/未来においては $\omega_{\mathbf{p}}$ は定数だから時間の並進対称性は回復している。したがって、無限の過去/未来では、平面波によって well-defined な粒子を定義できる。
- (ii) 無理やり定義する：粒子生成は実時間的のダイナミクスだから、有限の t でも粒子を定義したいのが人間のさである。“もっともらしいモード関数”を手で定めることで粒子をそれらしく定義する、という立場がこれである。例えば、 $\omega_{\mathbf{p}}$ が時間に依存する場合は、エネルギー演算子 $+i\partial_t$ の厳密な固有関数は存在しないが、近似的な固有関数は作ることができる。電磁場が十分遅いときには、そのような近似的な固有関数を WKB 近似などで系統的に構成できる。

ここでは (i) の処方にしたがってモード関数 $\phi_{\mathbf{p}}$ を同定する. (ii) に処方については 5.1 節で議論する²⁵ 電磁場が無限の過去/未来 $t \rightarrow \pm\infty$ で切れて, \mathbf{A} がある定数値 $\mathbf{A}(\pm\infty)$ に漸近するとするとすれば, その漸近領域では外場がないときと同じような議論が展開できる. つまり,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} = \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(-\infty)t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}(-\infty)}} \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}} = \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(+\infty)t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}(+\infty)}}, \quad (38)$$

のように無限の過去と未来で平面波になれ, という境界条件を課した2つのモード関数 $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ と $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}}$ を考える. このモード関数でモード展開すると,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\phi_{\mathbf{p}}^{\text{as}}(t) a_{\mathbf{p}}^{\text{as}} + \phi_{\mathbf{p}}^{\text{as}*}(t) b_{-\mathbf{p}}^{\text{as}\dagger} \right] \quad (\text{as} = \text{in}, \text{out}) \quad (39)$$

となる. 無限の過去と未来において, モード展開 (39) は, 外場がないときの普通のモード展開 (15) と完全に一致するので, まったく同じ議論が展開できて, $a_{\mathbf{p}}^{\text{as}}, b_{\mathbf{p}}^{\text{as}}$ が対応する漸近時間においてエネルギー $\omega_{\mathbf{p}}$, 運動量 \mathbf{p} , 電荷 ± 1 を作る生成消滅演算子になっていることが確認できる. ちなみに, 式 (19) のように

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{as}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{as}\dagger} \end{pmatrix} &= +i \int d^3\mathbf{x} \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{as}} \right)^* \\ - \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{as}*} \right)^* \end{pmatrix} \leftrightarrow \partial_t \phi \\ &= +i \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3\mathbf{x} \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right)^* \\ - \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{+i\omega_{\mathbf{p}}t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right)^* \end{pmatrix} \leftrightarrow \partial_t \phi \quad (\text{as} = \text{in}, \text{out}) \end{aligned} \quad (40)$$

の形で内積で生成消滅演算子を表現することもできる.

無限の過去と未来の演算子は同じでなく, それは式 (27) のような Bogoliubov 変換の形で結びついていることがここで重要である. この Bogoliubov 変換は2つのモード関数 $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ と $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}}$ が等しくないことから引き起こされる. 数学的には, 2つのモード関数とその複素共役は $\{\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}, \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*}\}$ と $\{\phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}}, \phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}*}\}$ は, それぞれ同じ2階微分方程式 (36) の解の基底となっているので, 基底の一方はもう一方の基底の線形結合で書けねばならない. つまり,

$$\phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}} = \alpha_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \quad (41)$$

なる定数 $\alpha_{\mathbf{p}}, \beta_{\mathbf{p}}$ が必ず存在する. 物理的には, 1次元の量子力学のポテンシャル散乱問題でポテンシャル散乱によって平面波の透過と反射が起こることと本質的に同じことが起きている (これは数学的には微分方程式の漸近解の Stokes 現象である, という風に言うこともできて, これが 4.1 節で議論する (完全)WKB 的な粒子生成の見方で大事な役割を果たす). つまり, $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ は無限の過去では正方向に運動するような単なる平面波であったが, これを時間発展させると有限の時間 t に存在する電場との散乱によって透過と反射を受ける. したがって, 無限の未来では一般に正方向と負方向に運動する2つ

²⁵Schwinger 機構の実時間発展の研究は, 田屋が知る限りすべての研究が (ii) の方法に依拠している. 一方で, 厳格な立場から (ii) の処方にコメントすると, (ii) の処方で粒子を好き勝手に定義するのは自由だし, 便利な物理的な見方を与えるのは確かである. しかし, それが “真の粒子” に対応している保証はどこにもないし, 実験的に測れるのはすべての相互作用から解放されたフリーな粒子のみなので実験的に確かめるすべも存在しない. つまり, この立場だと, (ii) の処方は無意味である. なにかうまい方法があると良いが, 原理的に難しいと思う.

の平面波の重ね合わせにならなければならない。この重ね合わせの度合いが係数 $\alpha_{\mathbf{p}}$ (= 透過係数) と $\beta_{\mathbf{p}}$ (= 反射係数) に他ならない。とにもかくにも、2つのモード関数 $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ と $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}}$ は式 (41) のように混じりあう。よって、式 (27) から、

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p}} & \beta_{\mathbf{p}}^* \\ \beta_{\mathbf{p}} & \alpha_{\mathbf{p}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} \quad (42)$$

である^{26,27}。なお、ここで、 $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ と $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}}$ が同じ規格化 (37) を満たすということから

$$\begin{aligned} 1 &= +i\phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \\ &= +i(\alpha_{\mathbf{p}}\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{p}}\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*})^* \overleftrightarrow{\partial}_t (\alpha_{\mathbf{p}}\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{p}}\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*}) \\ &= |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 \left(+i\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right) + |\beta_{\mathbf{p}}|^2 \left(+i\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \right) \\ &= |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 - |\beta_{\mathbf{p}}|^2 \end{aligned} \quad (45)$$

が従う²⁸。これは物理的にはユニタリティが保たれていることを保障する。この規格化 (45) より、

²⁶空間が非一様な場合でも漸近状態が well-defined ($|t| \rightarrow \infty$ で良い量子数がちゃんと同定できる) である限りは Bogoliubov 変換の方法は問題なく使える。が、時間発展の途中で、空間非一様性のために電磁場から運動量が共有されるので、Bogoliubov 変換が運動量成分に対して非対角な成分を持ちだす。つまり、一般的には、

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} \end{pmatrix} = \int d^3\mathbf{p}' \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} & \beta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^* \\ \beta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} & \alpha_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} \quad (43)$$

のような形を取る。空間非一様な状況での Schwinger 機構の数値計算をしようとする、この \mathbf{p}' の運動量積分を実行しないといけないので、一般に数値計算が重くて辛い (例えば、福嶋 [154] によるカイラル磁気効果の実時間シミュレーションなんかがあるが、これは重くてとても大変だったらしい)。Stochastic な数を導入してうまく数値計算のコストを減らす方法が開発されていたりする (例えば、Gelis-丹治のレビュー [7] に分かりやすく書いてある)。さらにちなむと、以下で見るように無限の過去の真空は無限の未来の状態の Fock 状態の重ね合わせで書けるが、この表式が空間非一様の場合にどう書けるのか田屋は良く知らない。ひょっとすると、真空崩壊率や粒子生成率の違いとかにおもしろい影響を出すかもしれないが、よくわからない。

²⁷Bogoliubov 変換は本質的に S 行列と等価である。 S 行列は漸近場 $\phi^{\text{as}} \approx \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi$ を $\phi^{\text{out}} = S^\dagger \phi^{\text{in}} S$ のように結びつけるから、 $\begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} \end{pmatrix} = S^\dagger \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} S$ である。ここで、 $S = e^{-\theta G}$ 、 $G := \frac{(2\pi)^3}{V} \left(a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}} e^{+i\phi} - a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} e^{-i\phi} \right) = -G^\dagger$ ($\theta, \phi \in \mathbb{R}$) とパラメトライズすると、Baker-Cambell-Hausdorff の公式から $e^X Y e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[X, [X, \dots, [X, [X, Y] \dots]]}_{n \text{ 回}}$ で、また、

$$\begin{aligned} \underbrace{[X, [X, \dots, [X, [X, \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix}]] \dots]}_{n \text{ 回}} &= \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} & (n = \text{偶数}) \\ \begin{pmatrix} e^{-i\phi} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \\ e^{+i\phi} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \end{pmatrix} & (n = \text{奇数}) \end{cases} \quad \text{だから、} \\ \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} \end{pmatrix} = e^{+\theta G} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} e^{-\theta G} &= \sum_{n=\text{偶数}} \frac{\theta^n}{n!} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} + \sum_{n=\text{奇数}} \frac{\theta^n}{n!} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \\ e^{+i\phi} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \end{pmatrix} \\ &= \cosh \theta \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} + \sinh \theta \begin{pmatrix} e^{-i\phi} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \\ e^{+i\phi} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & e^{-i\phi} \sinh \theta \\ e^{+i\phi} \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

となる。よって、Bogoliubov 変換 (42) は、 $\alpha_{\mathbf{p}} = \cosh \theta$ 、 $\beta_{\mathbf{p}} = e^{-i\phi} \sinh \theta$ と取ったことに対応する。(こうやって陽に Bogoliubov 変換と S 行列の関係を議論しているのは地味にあまり見たことないけど、何かご利益があったりするのだろうか?)

²⁸フェルミオンの場合は、 $1 = |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 + |\beta_{\mathbf{p}}|^2$ となる。これは $|\beta_{\mathbf{p}}|^2 \leq 1$ であることを意味し、最終的に生成粒子数の位相分布が 1 を超えないことを保障する (Pauli 排他率)。

Bogoliubov 変換 (42) の逆変換が

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p}}^* & -\beta_{\mathbf{p}}^* \\ -\beta_{\mathbf{p}} & \alpha_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} \end{pmatrix} \quad (46)$$

で与えられることが分かる.

3.3 粒子生成と真空崩壊

時間依存するポテンシャルがあることで正と負の平面波が混じりあい Bogoliubov 変換 (42) を引き起こすことをみた. この帰結が粒子生成と真空崩壊である.

これを見るために, まずは無限の過去と未来それぞれにおける真空を定義する:

$$0 = a_{\mathbf{p}}^{\text{as}} |0; \text{as}\rangle = b_{\mathbf{p}}^{\text{as}} |0; \text{as}\rangle \text{ for any } \mathbf{p} \text{ (as = in, out) with } 1 = \langle 0; \text{as} | 0; \text{as}\rangle. \quad (47)$$

無限の時間での真空の定義 (47) から, 無限の過去に用意した真空が時間発展した結果,

$$\frac{d^3}{d\mathbf{p}^3} \begin{pmatrix} N \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \langle 0; \text{in} | \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} & a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \\ b_{\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} & b_{\mathbf{p}}^{\text{out}} \end{pmatrix} |0; \text{in}\rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} |\beta_{\mathbf{p}}|^2 \\ |\beta_{-\mathbf{p}}|^2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

個の粒子と反粒子が生成されることが直ちに分かる²⁹. 運動量の符号が互いにマイナスなのは, 粒子と反粒子が対になって全運動量が $\mathbf{0}$ になるような粒子生成が起きているのだと解釈できる (今は空間一様電場なので運動量の供給がない). また, 運動量積分後の粒子と反粒子は数が同じ $N = \bar{N}$ になることはゲージ不変性の顕れ (突然, 電荷が湧いてきたりすることはない) である.

一方, 粒子生成が起きている, ということは, 無限の過去の真空は時間発展すると多粒子状態になっており, $|0; \text{in}\rangle \neq |0; \text{out}\rangle$ であることを意味する. $|0; \text{in}\rangle$ と $|0; \text{out}\rangle$ の関係性を精査する. 今, 粒子は運動量符号が逆になるように対で生成されると思えるので, $|0; \text{out}\rangle$ は無限の過去の Fock 基底 $|*; \text{in}\rangle$ で見ると粒子対のペアがたくさんいるような多粒子状態になっているはずである. したがって,

$$|0; \text{out}\rangle = A \prod_{\mathbf{p}} \exp \left[B_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \right] |0; \text{in}\rangle \quad (49)$$

²⁹単に粒子数じゃなくて, 多粒子相関とかももちろん計算することができる. 例えば, 文献 [155, 156].

を仮定してみる. この ansatz (49) が真空の条件 (47) を満たすならば, 任意の \mathbf{p}' に対して,

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}'}^{\text{out}} \\ b_{-\mathbf{p}'}^{\text{out}} \end{pmatrix} A \prod_{\mathbf{p}} \exp \left[B_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \right] |0; \text{in}\rangle \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{p}'}^* b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger} \\ \beta_{\mathbf{p}'}^* a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger} + \alpha_{\mathbf{p}'} b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}} \end{pmatrix} A \prod_{\mathbf{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_{\mathbf{p}}^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n |0; \text{in}\rangle \\
&= \left(A \prod_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_{\mathbf{p}}^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n \right) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}} + \beta_{\mathbf{p}'}^* b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger} \\ \beta_{\mathbf{p}'}^* a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger} + \alpha_{\mathbf{p}'} b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}} \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_{\mathbf{p}'}^n (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n |0; \text{in}\rangle \\
&= \left(A \prod_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_{\mathbf{p}}^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{\mathbf{p}'}^n}{n!} \begin{pmatrix} \frac{V}{(2\pi)^3} \alpha_{\mathbf{p}'} n (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n-1} (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n + \beta_{\mathbf{p}'}^* (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n+1} \\ \beta_{\mathbf{p}'}^* (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n+1} (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n + \frac{V}{(2\pi)^3} \alpha_{\mathbf{p}'} n (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n-1} \end{pmatrix} |0; \text{in}\rangle \\
&= \left(A \prod_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_{\mathbf{p}}^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{\mathbf{p}'}^n}{n!} \begin{pmatrix} \frac{V}{(2\pi)^3} B_{\mathbf{p}'} \alpha_{\mathbf{p}'} (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n+1} + \beta_{\mathbf{p}'}^* (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n+1} \\ \beta_{\mathbf{p}'}^* (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n+1} (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n + \frac{V}{(2\pi)^3} B_{\mathbf{p}'} \alpha_{\mathbf{p}'} (a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^{n+1} (b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}\dagger})^n \end{pmatrix} |0; \text{in}\rangle
\end{aligned} \tag{50}$$

であるから, 最後の行列の中身をじーっと見つめると,

$$B_{\mathbf{p}} = -\frac{(2\pi)^3 \beta_{\mathbf{p}}^*}{V \alpha_{\mathbf{p}}} \tag{51}$$

であることが分かる. 残る未定係数 A は規格化条件 $1 = \langle 0; \text{out} | 0; \text{out} \rangle$ から定めることができる:

$$\begin{aligned}
\langle 0; \text{out} | 0; \text{out} \rangle &= |A|^2 \prod_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \langle 0; \text{in} | \exp \left[B_{\mathbf{p}'}^* a_{\mathbf{p}'}^{\text{in}} b_{-\mathbf{p}'}^{\text{in}} \right] \exp \left[B_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \right] |0; \text{in}\rangle \\
&= |A|^2 \prod_{\mathbf{p}} \langle 0; \text{in} | \left(\sum_{n'} \frac{1}{n'!} (B_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}})^{n'} \right) \left(\sum_n \frac{1}{n!} (B_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n \right) |0; \text{in}\rangle \\
&= |A|^2 \prod_{\mathbf{p}} \langle 0; \text{in} | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|B_{\mathbf{p}}|^{2n}}{(n!)^2} (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}})^n (a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger})^n |0; \text{in}\rangle \\
&= |A|^2 \prod_{\mathbf{p}} \langle 0; \text{in} | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|B_{\mathbf{p}}|^{2n}}{(n!)^2} \left\{ n! \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^n \right\}^2 |0; \text{in}\rangle \\
&= |A|^2 \prod_{\mathbf{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_{\mathbf{p}}|^{2n}}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^{2n}} \\
&= |A|^2 \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}}|^2}} \\
&= |A|^2 \prod_{\mathbf{p}} |\alpha_{\mathbf{p}}|^2.
\end{aligned} \tag{52}$$

最終行で式 (45) を使った. よって³⁰,

$$|A| = \prod_{\mathbf{p}} |\alpha_{\mathbf{p}}|^{-1} = \exp \left[\sum_{\mathbf{p}} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}|^{-1} \right] = \exp \left[-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}| \right] \quad (53)$$

を得る. 以上から,

$$|0; \text{out}\rangle = \exp \left[-V \frac{(2\pi)^3}{\int} d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}| \right] \prod_{\mathbf{p}} \exp \left[-\frac{(2\pi)^3}{V} \frac{\beta_{\mathbf{p}}^*}{\alpha_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \right] |0; \text{in}\rangle \quad (54)$$

を得る (A のどうでもよい位相を 1 に取った). なお, 逆の関係式は,

$$|0; \text{in}\rangle = \exp \left[-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}| \right] \prod_{\mathbf{p}} \exp \left[+\frac{(2\pi)^3}{V} \frac{\beta_{\mathbf{p}}}{\alpha_{\mathbf{p}}^*} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} b_{-\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} \right] |0; \text{out}\rangle \quad (55)$$

となることを同様にして示せる. 以上の式から真空遷移確率は

$$|\langle 0; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 = \exp \left[-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 \right] \quad (56)$$

と分かる. 真空崩壊率は $w = \frac{1}{VT} \ln |\langle 0; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2$ と定義されるので [式 (3) の上を参照],

$$w = \frac{1}{T} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{T} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int d^3\mathbf{p} \frac{(-1)^{1+n}}{n} |\beta_{\mathbf{p}}|^{2n}, \quad (57)$$

ここで, $|\alpha_{\mathbf{p}}|^2 = 1 + |\beta_{\mathbf{p}}|^2$ (45) と $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ (ただし, $n=0$ の項は 1 と解釈する) であることを使った.

生成粒子数 N (48) と真空崩壊率 w (57) を見比べると,

$$\frac{N}{VT} = w(n=0) \neq w \quad (58)$$

であることが分かる. つまり, 粒子生成率 N/VT と真空崩壊率 w は違う量である. 電場が弱いときには粒子生成はあまり起こらないだろうから, $|\beta_{\mathbf{p}}| \ll 1$ で $w(n=0) \sim w$ より $N/VT \sim w$ となって2つの量は漸近するが, 一般の電場に対しては, w から N/VT は読み取ることはできないし, 電場が強くなってくるとその差は顕著になる [そもそも電場が強いときには真空崩壊率の定義の意味がよくわからなくなることも注意する; 式 (3) の上を参照]. N/VT と w はそもそも物理的に違う量じゃんとか w の定義にはログが入ってるんだから式の見ただけからして違う, などと言うのは簡単だが, 業界で混乱したり無自覚な人もしばしばいるので [24], もう少しこの事実を掘り下げてみる (福島-Gelis-Lappi [155] の議論も参考になる). 非常に端的に言えば³¹, N は (生成した粒子の数) \times (その遷移確率) で書けるが, w は単なる遷移確率の和で, 余計な重み因子 (生成した粒子の数) が要らないことに起因する. 違いが明瞭でないかもしれなかった1つの理由は, 粒子数 N は in-in の期待値 (48) として計算されてい

³⁰ $\prod_{\mathbf{p}}$ はすべて運動量モードを掛け合わせる, という形式的な記号であるが, まじめに量子論を考えると, 系は箱の中に入られていないと二乗可積分性が保てないから, 運動量 \mathbf{p} は本当は $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$ と離散化されているはずである. なので, $\prod_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} = \exp \left[\ln \prod_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \right] = \exp \left[\sum_{\mathbf{p}} \ln f_{\mathbf{p}} \right] = \exp \left[\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln f_{\mathbf{p}} \right]$ のように理解する ($L^3 := V$).

³¹ 文献読んでてもぜんぜん端的に書いてないし, いわゆる Strong-field QED の “専門家” も今日でもピント外れなことを言っていたりするので, 実際のところ人々がちゃんと理解しているのか正直よくわからない.

たのに対し、真空崩壊率 w は in-out の散乱振幅として計算されていたことに由来すると思う。なので、 N (48) を in-out の散乱振幅の言葉で書き直す。個数演算子 $a_{\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}}$ の間に out の Fock 基底の完全系 $1 = \sum_X |X; \text{out}\rangle \langle X; \text{out}|$ を挟み、多粒子状態の定義が式 (23) のように与えられていたことを思い出すと、

$$\begin{aligned}
\frac{N}{VT} &= \frac{1}{VT} \int d^3\mathbf{p} \langle 0; \text{in} | a_{\mathbf{p}}^{\text{out}\dagger} a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} | 0; \text{in} \rangle \\
&= \frac{1}{VT} \int d^3\mathbf{p} \sum_X |\langle X; \text{out} | a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} | 0; \text{in} \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{VT} \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_i \sum_{n_1, \dots, n'_1, \dots=0}^{\infty} |\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots, \mathbf{p}_i(n_i), \dots; \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots; \text{out} | a_{\mathbf{p}_i}^{\text{out}} | 0; \text{in} \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{VT} \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_i \sum_{n_1, \dots, n'_1, \dots=0}^{\infty} \left| \langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots, \mathbf{p}_i(0), \dots; \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots; \text{out} | \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_{\mathbf{p}_i}^{\text{out}} \right)^n a_{\mathbf{p}}^{\text{out}} | 0; \text{in} \rangle \right|^2 \\
&= \frac{1}{VT} \sum_i \sum_{n_1, \dots, n'_1, \dots=0}^{\infty} (n_i + 1) |\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots, \mathbf{p}_i(n_i + 1), \dots; \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{VT} \sum_i \sum_{n_1, \dots, n'_1, \dots=0}^{\infty} n_i |\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots, \mathbf{p}_i(n_i), \dots; \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{VT} \sum_{\substack{n_1, \dots, n'_1, \dots=0 \\ (n_1 = \dots = n'_1 = \dots = 0 \text{ は除く})}}^{\infty} (n_1 + n_2 + \dots) |\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots; \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2. \quad (59)
\end{aligned}$$

つまり、(作った粒子のトータルの数) \times (遷移確率) の和の形を取る。なお、最終行で $n_1 = \dots = n'_1 = \dots = 0$ の状態は $n_1 + n_2 + \dots = 0$ だから 0 の寄与しか返さないことを使った。電場が弱いときにはたかだが粒子は 1 個しか生成されないだろうから、 $n_1 + n_2 + \dots = 1$ として複数ペアの生成は無視して良くて、

$$\frac{N}{VT} \sim \frac{1}{VT} \sum_{n_1 + n_2 + \dots = 1} |\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots; \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \quad (60)$$

と近似できる。他方で、 w はユニタリティから $1 = \sum_X |\langle X; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 = \sum_{X \neq 0} |\langle X; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 + |\langle 0; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2$ となっていることに注意すると、

$$\begin{aligned}
w &= \frac{-1}{VT} \ln \left[1 - \sum_{X \neq 0} |\langle X; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \right] \\
&= \frac{1}{VT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{X \neq 0} |\langle X; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \right]^n \\
&= \frac{1}{VT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{\substack{n_1, \dots, n'_1, \dots=0 \\ (n_1 = \dots = n'_1 = \dots = 0 \text{ は除く})}}^{\infty} |\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots; \bar{\mathbf{p}}'_1(n'_1), \dots; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \right]^n. \quad (61)
\end{aligned}$$

したがって、真空崩壊率 w は、めんどくさいログから来る冪の構造を忘れれば、単に遷移確率の和で書ける。つまり、複数ペアを生成するような過程が効き始めると、(作った粒子のトータルの数) =

$n_1+n_2+\dots$ の分だけどうしても N からズレる. 電場が弱いときには N/VT の近似式 (60) と一致するが, それは, 弱電場の極限だと, (1) たかだか 1 ペアしか生成されないので, (作った粒子のトータルの数) = $n_1+n_2+\dots=1$ となるから, この余分な重み因子の違いが効かなくなる; (2) 遷移確率は小さいだろうから, ログを開いたときの $n=1$ しか効かなくなる, という 2 つの事情が効いてきていることに由来する.

最後に, 粒子生成数の公式 (48) は, 1 ペアを作るイベントだけではなくて, n ペアを作るようなすべてのイベントが足し上げられていることを式 (59) を使って確かめる. 遷移確率 $|\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots; \overline{-\mathbf{p}'_1(n'_1)}, \dots; \text{out}|0; \text{in} \rangle|$ を真空の関係式 (55) を使って計算すると,

$$\begin{aligned}
& |\langle \mathbf{p}_1(n_1), \dots; \overline{-\mathbf{p}'_1(n'_1)}, \dots; \text{out}|0; \text{in} \rangle|^2 \\
&= \left| \langle 0; \text{out} | \prod_i \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n_i!}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a_{\mathbf{p}_i}^{\text{out}} \right)^{n_i} \left(\frac{1}{\sqrt{n'_i!}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} b_{-\mathbf{p}_i}^{\text{out}} \right)^{n'_i} \right) \right. \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}| \right] \prod_j \exp \left[+\frac{(2\pi)^3}{V} \frac{\beta_{\mathbf{p}_j}}{\alpha_{\mathbf{p}_j}^*} a_{\mathbf{p}_j}^{\text{out}\dagger} b_{-\mathbf{p}_j}^{\text{out}\dagger} \right] |0; \text{out} \rangle \left. \right|^2 \\
&= \exp \left[-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 \right] \delta_{n_i, n'_i} \\
&\quad \times \left| \langle 0; \text{out} | \prod_i \left(\frac{1}{n_i!} \frac{(2\pi)^3}{V} a_{\mathbf{p}_i}^{\text{out}} b_{-\mathbf{p}_i}^{\text{out}} \right)^{n_i} \prod_j \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left(+\frac{(2\pi)^3}{V} \frac{\beta_{\mathbf{p}_j}}{\alpha_{\mathbf{p}_j}^*} a_{\mathbf{p}_j}^{\text{out}\dagger} b_{-\mathbf{p}_j}^{\text{out}\dagger} \right)^\ell |0; \text{out} \rangle \right|^2 \\
&= \exp \left[-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 \right] \delta_{n_i, n'_i} \left| \prod_i \left(\frac{\beta_{\mathbf{p}_i}}{\alpha_{\mathbf{p}_i}^*} \right)^{n_i} \right|^2 \\
&= \delta_{n_i, n'_i} |\langle 0; \text{out}|0; \text{in} \rangle|^2 \prod_i \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_i}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_i}|^2} \right)^{n_i}. \tag{62}
\end{aligned}$$

最終行で $\exp \left[-\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \ln |\alpha_{\mathbf{p}}|^2 \right] = |\langle 0; \text{out}|0; \text{in} \rangle|^2$ [式 (56)] を使った. 式 (62) は, ある運動量モード \mathbf{p} にペアが 1 つ生成されるごとに確率因子 $|\beta_{\mathbf{p}}|^2/|\alpha_{\mathbf{p}}|^2$ が付く, ということを言っている. つまり, 1 ペアを生成する確率は単純に $|\beta_{\mathbf{p}}|^2$ で与えられるわけではない. 実際, 式 (59) に代入して N を計算すると, これらの総和を取ったものが $|\beta_{\mathbf{p}}|^2$ を与えることが確認できる:

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n'_1, \dots = 0 \\ (n_1 = \dots = n'_1 = \dots = 0 \text{ は除く})}}^{\infty} (n_1 + n_2 + \dots) \times \delta_{n_i, n'_i} |\langle 0; \text{out}|0; \text{in} \rangle|^2 \prod_i \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_i}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_i}|^2} \right)^{n_i} \\
&= |\langle 0; \text{out}|0; \text{in} \rangle|^2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \dots (n_1 + n_2 + n_3 + \dots) \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2} \right)^{n_1} \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_2}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_2}|^2} \right)^{n_2} \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_3}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_3}|^2} \right)^{n_3} \dots \\
&= |\langle 0; \text{out}|0; \text{in} \rangle|^2 \\
&\quad \times \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \dots \left(\frac{\frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}}{\left(1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}\right)^2} + n_2 \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}} + n_3 \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}} + \dots \right) \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_2}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_2}|^2} \right)^{n_2} \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_3}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_3}|^2} \right)^{n_3} \dots \\
&= |\langle 0; \text{out}|0; \text{in} \rangle|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{n_3=0}^{\infty} \cdots \left(\frac{\frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}}{\left(1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}\right)^2} \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_2}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_2}|^2}} + \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}} \frac{\frac{|\beta_{\mathbf{p}_2}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_2}|^2}}{\left(1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_2}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_2}|^2}\right)^2} + n_3 \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_1}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_1}|^2}} \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_2}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_2}|^2}} + \cdots \right) \\ & \times \left(\frac{|\beta_{\mathbf{p}_3}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_3}|^2} \right)^{n_3} \cdots \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & = \cdots \\ & = |\langle 0; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \left(\sum_i \frac{\frac{|\beta_{\mathbf{p}_i}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_i}|^2}}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_i}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_i}|^2}} \right) \left(\prod_i \frac{1}{1 - \frac{|\beta_{\mathbf{p}_i}|^2}{|\alpha_{\mathbf{p}_i}|^2}} \right) \\ & = |\langle 0; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \underbrace{\left(\sum_i |\beta_{\mathbf{p}_i}|^2 \right)}_{= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} |\beta_{\mathbf{p}}|^2} \underbrace{\left(\prod_i |\alpha_{\mathbf{p}_i}|^2 \right)}_{= |\langle 0; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^{-2}} \\ & = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} |\beta_{\mathbf{p}}|^2. \end{aligned} \quad (64)$$

3.4 一様定常電場の場合

正準量子化と Bogoliubov 変換に基づいた粒子生成の定式化によれば、粒子生成量や真空崩壊率などの興味ある物理量はすべて Bogoliubov 係数 $\alpha_{\mathbf{p}}, \beta_{\mathbf{p}}$ で書くことができる。他方、Bogoliubov 係数はモード関数から決定される。したがって、この定式化では、モード方程式 (36) が解けるかどうか、というのが最終的な問題になる。モード方程式が解ける解析的に解けるケースは限られている³²。ここでは、一様定常電場 $E(t) = E$ を考えて、それが古の Schwinger [18] や Nikishov [23] の結果を再現することを見る。

一様定常電場は、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Et \end{pmatrix} \quad (65)$$

で与えられる。ここで、電場の方向は z 軸に取った。このときのモード方程式 (36) は、

$$0 = [\partial_t^2 + m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 + (p_3 + eEt)^2] \phi_{\mathbf{p}} \quad (66)$$

となる。これはいわゆる Weber の方程式 (wikipedia)³³であり、厳密解は放物円筒関数 (Parabolic cylinder function, または、Weber 関数) $D_{\nu}(z)$ で与えられ、その関数の性質はとてもよく調べられている。

³²Schwinger 機構の文脈で知られているのは、定常電場、Sauter 電場 $E \propto 1/\cosh^2 \omega t$ [14, 157, 158], 指数関数的に現象・増大する電場 $E \propto e^{-\omega t}, e^{-\omega x}$ [159, 160, 161], 二乗で落ちるような電場 $E \propto t^{-2}, x^{-2}$ [162, 163], light-like な引数の電場 $E = E(x^{\pm})$ [164, 165], 非対称なパルス $E \propto \sqrt{1 + e^{t/\sigma}} \cosh^{-2}(t/2\sigma)$ [166] などがある。文献 [167, 168] が電磁場中の dirac 方程式や Klein-Gordon 方程式の解をまとめている。粒子生成が起きないような背景電磁場だと、平面波 (Volkov 解 [169]) や定常磁場、あるいは、Sauter 型のパルス磁場がある。Strong-field QED の散乱振幅とかを計算するときには基本的には Volkov 解が使われている [170, 171]。

³³微分方程式論の観点からは、Weber 方程式は 2 級の不確定特異点を $t = \infty$ に持ち、これは超幾何微分方程式の 3 つの確定特異点を合流させることで得られる。なので、超幾何微分方程式の知識を使えば Bogoliubov 係数は計算できる。他方で、ポテンシャル ω_p^2 に入っている冪が t^3 とか大きくなったり関数形が複雑になったりすると、不確定特異点の級の大きさが増えて、もはや超幾何微分方程式を合流させたくらいじゃ記述できなくなる。一般のポテンシャルの Schwinger 機構

そのよくわかっている性質を使うと Bogoliubov 係数が求まる. 規格化条件 (37) と境界条件 (38)³⁴を課せば解を完全に定めることができ,

$$\begin{aligned}\phi_{\text{in}}(t) &= \frac{e^{-\frac{\pi}{4} \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}}}{(2eE)^{1/4}} \left[D_{-i \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE} - 1/2} \left(-e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{eE}} (eEt + p_3) \right) \right]^*, \\ \phi_{\text{out}}(t) &= \frac{e^{-\frac{\pi}{4} \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}}}{(2eE)^{1/4}} D_{-i \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE} - 1/2} \left(+e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{eE}} (eEt + p_3) \right)\end{aligned}\quad (67)$$

を得る³⁵. 境界条件を正しく満たしていることは, 例えば,

$$D_{\nu}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \begin{cases} z^{\nu} e^{-z^2/4} & (|\arg z| < \pi/2) \\ z^{\nu} e^{-z^2/4} - \frac{\sqrt{2\pi} e^{-i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu-1} e^{+z^2/4} & (\arg z < -\pi/2) \\ z^{\nu} e^{-z^2/4} - \frac{\sqrt{2\pi} e^{+i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu-1} e^{+z^2/4} & (\arg z > +\pi/2) \end{cases} \quad (68)$$

という漸近公式を使えばチェックできる³⁶. また,

$$D_{\nu}(z) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\sqrt{2\pi}} [e^{-i\pi\nu/2} D_{-\nu-1}(-iz) + e^{+i\pi\nu/2} D_{-\nu-1}(+iz)] \quad (69)$$

という公式が成り立つらしいので, それを使うと,

$$\phi_{\text{in}} = \frac{\sqrt{2\pi} e^{+i\pi/4} e^{-\frac{\pi}{2} \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}\right)} \phi_{\text{out}} - i e^{-\pi \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}} \phi_{\text{out}}^* \quad (70)$$

を示すことができる. 式 (41) と規格化条件 (45) から $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} = \alpha_{\mathbf{p}}^* \phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}} - \beta_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{out}*}$ + だから,

$$\alpha_{\mathbf{p}} = \frac{\sqrt{2\pi} e^{+i\pi/4} e^{-\frac{\pi}{2} \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}\right)}, \quad \beta_{\mathbf{p}} = +i e^{-\pi \frac{m^2 + p_{\perp}^2}{2eE}} \quad (71)$$

と分かる.

を議論しましょう, というときに考えられるもっとも簡単な拡張は, 4つの確定特異点を持つ微分方程式の解である Heun 関数 (または2つ確定特異点を合流させた合流型 Heun 関数やもっと合流させた Mathieu 関数や Lamé 関数) を使った解になるようなポテンシャルを考えることだと思うが, Heun 関数の漸近挙動は完全にわかっているわけではないので, いい感じな粒子生成の議論はできなそうな感じに見える.

³⁴定常電場があるということは無限の時間電場がかかっているので, 漸近状態は厳密には定義できない. 真面目に議論をする場合は, 電場を有限の時間で切っておいて, $E \rightarrow \Theta(t+T/2)\Theta(T/2-t)E$ として, $t < -T/2$ と $t > T/2$ で条件 (38) を満たすような解を探すことになる. 結果は同じになる.

³⁵この電場にドレスされたモード関数を使って定常電場中の散乱過程を議論することはできる. 例えば, Nikishov [172] や田屋の dynamically assisted Schwinger mechanism に関係した仕事 [134, 145, 146, 173], あるいは instant preheating の文脈の田屋-山田 [174]. 逆に言えば, これくらいしか関連する仕事がないと思うので, 一様定常電場のモード関数を使ってなんか散乱過程とかを計算するのは今がチャンスかもしれない (LCFA とかに基づいた適当な散乱確率の計算が基本的に分野でやられていることなので, なんかに近似に依らない計算ができるとうれしかったりする). 一方で, 定常電場は無限に電場が存在するので, 無限に電子を加速できてしまうから, それに伴う赤外発散が結構シビアで, これがよくわからない (Nikishov はそういう問題をガン無視していると思う).

³⁶境界条件を確かめるために $|t| \rightarrow \infty$ を取るときに $|p_3 + eEt| \rightarrow \infty$ としている. つまり, 電場の始/終時刻を $\pm T/2$ とするとき, $|p_3| \ll eET/2$ が暗黙の内に仮定されていることに注意. つまり, 以下の議論で求まる Bogoliubov 係数は $-eET/2 \lesssim p_3 \lesssim +eET/2$ でしか使えない. このことは $\int dp_3 \sim eET$ と扱っても良いこと, また, 粒子分布は kinetic momentum $P_3 = p_3 - eA^3(-T/2)$ について $0 \lesssim P_3 \lesssim eET$ の範囲に広がっていること, をほのめかす.

Bogoliubov 係数の表式 (71) が分かったので, 粒子生成数や真空崩壊率を直ちに計算できる. 粒子生成数は式 (48) より,

$$\frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} = \frac{d^3 \bar{N}}{d\mathbf{p}^3} = \frac{V}{(2\pi)^3} e^{-\pi \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE}} \quad (72)$$

であり, Nikishov [23] が求めた公式 (4) を再現する. 真空崩壊率 w は, 式 (56) より, $|\alpha_{\mathbf{p}}|^2 = 1 + |\beta_{\mathbf{p}}|^2$ ³⁷ に注意して,

$$\begin{aligned} w &= \frac{-1}{VT} \ln |\langle 0; \text{out} | 0; \text{in} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \ln \left[1 + e^{-\pi \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE}} \right] \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE}} \\ &= \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\pi \frac{m^2}{eE}}. \end{aligned} \quad (73)$$

最終行で $\int dp_3 = eET$ とした³⁸. 式 (73) は Schwinger の公式 (3) を再現する. ただし, スカラー粒子を扱っているために余計な位相因子 $(-1)^{1+n}$ が付いているのと, スピン縮退度がないのでファクター 1 がないのが違い.

4 半古典近似

(4 節で言いたいこと)

- 半古典近似は (遅い) 電場に対する粒子生成を扱うのに適した手法.
- 1 粒子エネルギー $\omega_{\mathbf{p}}(z)$ の複素平面での解析構造を調べる問題に落ちる. 結果, 式 (127) のように, すべての粒子生成イベントの確率振幅を足し上げて二乗したような形で粒子生成数が計算できる.
- 半古典近似を使うと, 非摂動/摂動的粒子生成の移り変わりや量子干渉効果が議論できたりする.

³⁷Bogoliubov 変換の表式 (71) から陽にこの規格化条件を示したいなら, ガンマ関数の公式 $\Gamma(1 - ix)\Gamma(ix) = \frac{-i\pi}{\sinh \pi x}$ を使うと良い.

³⁸標準的な扱いなのだが, ノリな扱いだと思う. いろいろな言い訳がある. 脚注 36 は一つの言い訳. あるいは, モード方程式 (66) を見ればわかるように, p_3 と t は必ず $p_3 + eEt$ の組み合わせで出てくる. よって, p_3 を動かすことと eEt を動かすことは同じとみなせそう: $dp_3 = eEdt$. それを認めれば, 形式的に電場の時間が $t \in [-T/2, +T/2]$ (T は十分に大きい) だと思えば, $\int_{p_3^{\min}}^{p_3^{\max}} dp_3 = eE \int_{-T/2}^{+T/2} dt = T$. さらに違う言い訳は, 粒子生成は, 粒子を生成するのに必要なエネルギーが最も小さいときに起こるような気がするから, (kinetic な) 運動量 $p_3 + eEt$ が 0 になるところ, つまり, $t = -p_3/eE$ の瞬間に起きるだろう. よって, p_3 を積分するとは, 粒子生成時刻を積分しろ, ということに対応し, 定常電場の下では粒子生成はコンスタントに起きると思えば, $\int dp_3 = eET$ となる.

電場が無限寿命だと生成粒子は無限の未来で必ず無限大まで加速されてしまうのが諸悪の根源で, それが定常電場のときに縦運動量の分布が明白でない要因である. まじめにやるためには電場を有限寿命にする必要がある. 例えば, 丹治 [152] は真面目にそういうことをやって, 縦方向の分布が, kinetic な運動量 P_3 に対して, $P_3 \in [0, eET]$ となることを演示している.

モード方程式を解いて Bogoliubov 係数を求めれば粒子生成は計算できる。しかし、モード方程式は一般的に解くことはできない。なので、一様定常電場のような簡単な場合でなければ、普通は数値計算に頼るしかないのが現状である。

そうはいっても、一般的な場合でもできれば解析的な議論をしたいのが理論屋の心情である。そういう解析的な議論を可能にする近似法が半古典近似である。最近の言葉遣いをすると、半古典近似とは、物理量 O (粒子数でも n 点関数の期待値でもなんでも) を Planck 定数 \hbar について trans-series 展開し、その低次のインスタントン寄与を計算する、という近似である。つまり、

$$O = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-I_n/\hbar} \hbar^m O_{n,m} \quad (I_{n+1} > I_n > I_0 = 0) \quad (74)$$

とし、 I_1 の寄与に相当する部分を計算する³⁹。

いろんな方法で半古典近似の計算は実行できるが、(後で断熱正則化とかを説明するときの便宜も考えて) ここでは完全 WKB 法に基づいた方法を説明する [39]。Worldline instanton 法とか DDP 法とかいろんな半古典近似の方法があるが、結局すべて等価であることを示せる。なお、完全 WKB の数学の文献として、文献 [175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182] などがある。日本語の文献として、岩波から河合-竹井「特異摂動の代数解析学」という本が出ている。

4.1 完全 WKB 法

完全 WKB 法は端的に言えば、“普通”の WKB 近似 [(Jeffreys)-Wentzel-Kramers-Brillouin [183, 184, 185, 186]] に Borel 総和法 [187] を組み合わせた、という方法である。もう少し正確に言うと、WKB 近似とは、微分方程式を \hbar の冪展開で逐次的に解く方法であるが、これは階乗的に漸近発散してしまうので、その漸近発散を Borel 総和法によって救済する、という方法である。階乗発散すると収束半径が 0 なので、“普通”の WKB 法は数学的には実は ill-defined だったのだが、Borel 総和法を用いることで well-defined にすることができる。加えて、漸近発散を真面目に扱ったおかげで微分方程式の漸近解に対する Stokes 現象を系統的に扱う手法を与える。

この節では \hbar を陽に書く。

4.1.1 普通の WKB 近似

2 階微分方程式⁴⁰

$$[\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)] \phi(t) \quad (75)$$

を考える。WKB 近似する前に、 \hbar 展開は Q の時間変調の遅さに関わっていることに注意する。実際、 $\tau := t/\hbar$ とすれば、微分方程式 (75) は、

$$[\partial_\tau^2 + Q(\hbar\tau)] \phi \quad (76)$$

³⁹逆に、高次の $I_{n>1}$ のインスタントン寄与までちゃんと計算した、という仕事を知らない。

⁴⁰一般の高階微分方程式に対する完全 WKB 法はまだ未完だと思う。仮想変わり点など 2 階の場合には出て来ないよくわからない問題が出てくるらしい。物理への応用を考えると、Schrödinger 方程式は $i\partial_t\psi = H\psi$ と書けるが、ハミルトニアン H が 2×2 くらいに落とせるならば、Schrödinger 方程式は 2 階の微分方程式に変形できるので完全 WKB が使えるが、バンドを複数持っていて、 H が $n \times n$ ($n \geq 3$) とかになっている場合は現状解析がキツイ。

と書き換えることができる。したがって、 $\hbar \rightarrow 0$ の極限では、 $Q(\hbar\tau) \rightarrow Q(0)$ としても良さそうで、そうすると平面波が良い解を与える:

$$\phi \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \frac{e^{\mp \frac{i}{\hbar} \sqrt{Q(0)} t}}{\sqrt{2\sqrt{Q(0)}}} = \frac{e^{\mp i \int^t dt \sqrt{Q(0)}}}{\sqrt{2\sqrt{Q(0)}}}. \quad (77)$$

ここで、解は $\pm 1 = i\phi_{\pm}^* \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\pm}$ を満たすように規格化し (前節の計算とコンシステント), 正負の振動モードを添え字の \pm で区別した. \hbar が小さいと思えば, ϕ は式 (77) に書いた平面波からさほど変わらないと期待できる. そこで, $\sqrt{Q(0)}$ を適当な関数で置き換えた

$$\phi_{\pm} = \frac{e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int^t dt \Omega(t)}}{\sqrt{2\Omega(t)}} \quad (78)$$

という ansatz (WKB ansatz) を置く⁴¹. ここで, 指数関数の肩の積分の下端は陽に書いていないが実数を取るものとする (WKB ansatz を正しく規格化するため). この ansatz をもともとの微分方程式 (75) に代入すると, 未定関数 $\Omega(t)$ を定める式が求まる:

$$0 = Q - \Omega^2 + \hbar^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right]. \quad (79)$$

式 (79) は, Ω を \hbar 展開,

$$\Omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Omega_n(t), \quad (80)$$

することで逐次的に決定できる. 例えば, 最初の数項は, mathematica によれば,

$$\Omega_0 = Q^{1/2} \quad (81a)$$

$$\Omega_1 = 0, \quad (81b)$$

$$\Omega_2 = \frac{5\dot{Q}^2 - 4Q\ddot{Q}}{32Q^{5/2}} \quad (81c)$$

$$\Omega_3 = 0, \quad (81d)$$

$$\Omega_4 = -\frac{3(4Q\ddot{Q} - 7\dot{Q}^2)(4Q\ddot{Q} - 5\dot{Q}^2)}{2048Q^{11/2}} \quad (81e)$$

$$\Omega_5 = 0, \quad (81f)$$

$$\Omega_6 = \frac{(5\dot{Q}^2 - 4Q\ddot{Q})(128Q^2\ddot{Q}^2 + 383\dot{Q}^4 - 452Q\dot{Q}^2\ddot{Q})}{65536Q^{17/2}} \quad (81g)$$

⁴¹粒子生成を議論するときは本質的に量子力学の散乱問題を議論しているのと同じなので, モード関数は無限に飛び続けることができ, それゆえに指数に乗っている肩の数は虚数の形で出てくる. 完全 WKB で量子力学の束縛問題を考えることもできて, このときには指数の肩は実数になって, WKB 解の \pm は指数関数的に爆発する解と収束する解を表すことになる. このとき, Stokes 現象を解析した結果出てくる Stokes 係数が爆発する解を禁止せよ, という条件から量子系の量子化条件が定まる.

$$\Omega_7 = 0, \quad (81h)$$

$$\Omega_8 = -\frac{3(4Q\ddot{Q} - 5\dot{Q}^2)(2240Q^3\ddot{Q}^3 - 11387\dot{Q}^6 + 20452Q\dot{Q}^4\ddot{Q} - 11920Q^2\dot{Q}^2\ddot{Q}^2)}{8388608Q^{23/2}} \quad (81i)$$

⋮

のようになるらしい. 一般にスカラーの場合は \hbar は \hbar^2 の形でモード方程式に入っているため, $\Omega_{n=\text{odd}} = 0$ となる⁴². 以上の展開を低次で打ち止めるのが WKB 近似である.

後で具体例を見るように, この Ω の \hbar 展開 (80) は一般には階乗発散する $\Omega_n \sim n!$. したがって, 展開にオーダー n を上げるほど WKB 近似の精度は一般には悪くなる. あるいは, そもそも厳密な立場からは式 (80) は収束半径は 0 だから ill-defined である. これを Borel 総和法によって救済するのが完全 WKB 法のアイデアなのだが, Borel 総和法を適用するためには指数関数の肩に展開級数が乗っているのはいささか都合が悪い. なので, 指数関数を展開して,

$$\phi_{\pm}(z; \hbar) =: \exp\left[\mp \frac{i}{\hbar} \int^z dz' \sqrt{Q(z')}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(z) \hbar^n =: \exp\left[\mp \frac{i}{\hbar} \int^z dz' \sqrt{Q(z')}\right] \psi_{\pm}(z; \hbar), \quad (82)$$

と普通の冪級数の形に書き直すことにする. ここで, ϕ_{\pm} はもともと $t \in \mathbb{R}$ で定義されていたが, 後の便宜のために複素平面 $z \in \mathbb{C}$ に解析接続した. また, \hbar に関する級数であることを強調するために関数の引数に \hbar を書いた. Ω_n が発散する, という情報は ψ_n に引き継がれていおり, 一般的に $\psi_n \sim n!$ である.

4.1.2 Borel 総和法

Borel 総和法はたかだか階乗発散するような漸近級数から well-defined な級数を得る方法である. この総和法は次の 2 つのステップから実行される:

(1) Borel 変換を計算する.

複素平面上に解析接続された漸近級数 $\psi_{\pm}(z; \hbar)$ (82) に対して, Borel 変換 $\tilde{\psi}(z; \eta)$ を

$$\tilde{\psi}(z; \eta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(z)}{n!} \eta^n \quad (83)$$

と定義する. 展開係数 $\psi_{\pm,n}$ はたかだか階乗発散だったので, $n!$ で割ってあげた結果, Borel 変換 $\tilde{\psi}$ は η に対して有限の収束半径を持ち, well-defined である.

(2) Laplace 変換する (Borel 和を計算する).

Borel 変換 $\tilde{\psi}(z; \eta)$ (83) の Laplace 変換を取ることによって Borel 総和が完了する:

$$\Psi_{\pm}(z; \hbar) := \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \tilde{\psi}(z; \eta). \quad (84)$$

⁴²フェルミオンの場合はそうならない. Dirac 方程式 $0 = [i\hbar\mathcal{D} - m]\psi$ に対して, $\psi = [i\mathcal{D} + m]\phi$ という ansatz を考えると, ϕ は Klein-Gordon 型の 2 階微分方程式を満たす. よって, Dirac 方程式を解く問題はこの 2 階微分方程式を解く問題に落ちるわけだが, この 2 階微分方程式は $\hbar F_{\mu\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}$ みたいな $\hbar^{\frac{1}{2}}$ の項を含む.

Borel 総和によって得られた Ψ_{\pm} は、もともとの級数 ψ_{\pm} の Borel 和と呼ばれる。級数 ψ_{\pm} はもともとのモード関数 ϕ_{\pm} から指数関数部分を抜き取ったものだったので [式 (82)], Borel 和 Ψ_{\pm} に対応するモード関数は

$$\Phi_{\pm}(z; \hbar) := \exp \left[\mp \frac{i}{\hbar} \int^z dz' \sqrt{Q(z')} \right] \Psi_{\pm}(z; \hbar) \quad (85)$$

である。

一見すると、あまり Laplace 変換を取る動機が分からないが、もともとの級数 $\psi_{\pm}(z; \hbar)$ がもしも well-defined な収束級数ならば、Laplace 変換は Borel 変換に対する逆変換になっている。実際、

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(z; \hbar) &= \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(z)}{n!} \eta^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(z)}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} \eta^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm,n}(z)}{n!} \hbar^n \Gamma(1+n) \quad (\because \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm,n}(z) \hbar^n \\ &= \psi_{\pm}(z; \hbar). \end{aligned} \quad (86)$$

2 行目で和と積分を交換したが、これは $\psi_{\pm}(z; \hbar)$ がもしも well-defined な収束級数なら許される。

Borel 和 Ψ_{\pm} の大事なところは、例えもともとの級数 $\psi_{\pm}(z; \hbar)$ が ill-defined であっても、Borel 変換は well-defined なので、Borel 和は Laplace 変換が取れる限り well-defined である。しかも、式 (86) のような感じで、Borel 和 Ψ_{\pm} を漸近展開すると漸近級数としてもともとの級数 ψ_{\pm} が得られるので、Borel 和 Ψ_{\pm} はもともとの級数 ψ_{\pm} を自然な形で well-defined に拡張したものを与える。一方、ここで注意が必要で、Laplace 変換は必ずしも実行できない。というのも、Borel 変換 $\tilde{\psi}(z; \eta)$ は一般に複素 η 平面上で特異性 (極やブランチカット) を持つ。Borel 変換 $\tilde{\psi}(z; \eta)$ は z の関数なので特異性は η 平面内を動くことができる (movable singularity)。変数の z が特定の値を取ると、特異性は Laplace 積分の経路 $\eta \in [0, \infty]$ に当たり、そのときは Laplace 積分を厳密に実行できない。このときには Laplace 積分の経路を複素平面上に解析接続して、特異性を避けるように経路を適切にズラす必要が出てくる。このズラす作業が Borel 和の Stokes 現象と密接に関係する。具体例で見た方が分かりやすいので、次の小節で Airy 方程式の場合に具体的に議論する。

4.1.3 具体例: Airy 方程式と Stokes 現象

Airy 方程式とはポテンシャルが $Q \propto z$ と与えられる場合である。つまり、

$$0 = [\hbar^2 \partial_z^2 + \xi(z - z_0)] \phi. \quad (87)$$

ここで、変数 $z \in \mathbb{C}$ は複素平面に既に拡張されている。Airy 方程式 (87) を完全 WKB に基づいて解析し、微分方程式の漸近解の Stokes 現象がどのように記述されるかの具体例を見る。Airy 方程式 (87) は微分方程式の Stokes 現象を理解する上で最も基本的かつ重要な例である。(というのは、Stokes 係

数は Stokes 線をどこで跨いでも変わらないので, Stokes 線が生え出す変わり点の近くに無限に近づけば, ポテンシャルをテイラー展開することができて線形の項しか効かなくなる. つまり, ポテンシャルは Airy 型になる.)

まずは普通の WKB 近似の気持ちで \hbar 展開をして漸近級数 $\psi(z; \hbar)$ を求める. Airy 方程式 (87) の場合は, 未定関数 Ω を決定する方程式 (79) を \hbar 展開で完全に解き切ることができる. 賢い方法を田屋は知らないので, 若干力づくになるが, 以下のようにして解ける. 最初の数項を mathematica などを使って地道に計算してみると, $\Omega_0 = \xi^{1/2}(z - z_0)^{1/2}, \Omega_1 = 0, \Omega_2 = (5/32)\xi^{-1/2}(z - z_0)^{-5/2}, \Omega_3 = 0, \Omega_4 = (-1105/2048)\xi^{-3/2}(z - z_0)^{-11/2}, \Omega_5 = 0, \Omega_6 = (414125/65536)\xi^{-5/2}(z - z_0)^{-17/2}, \dots$ となる. 対応する $\psi_{\pm, n}$ は, $\psi_{\pm, 0} = (1/\sqrt{2})\xi^{-1/4}(z - z_0)^{-1/4}, \psi_{\pm, 1} = \pm i(5/48\sqrt{2})\xi^{-3/4}(z - z_0)^{-7/4}, \psi_{\pm, 2} = (-385/4608\sqrt{2})\xi^{-5/4}(z - z_0)^{-13/4}, \psi_{\pm, 3} = \mp i(85085/663552\sqrt{2})\xi^{-7/4}(z - z_0)^{-19/4}, \dots$ 規則性から,

$$\psi_{\pm, n} = d_n \times (\pm i)^n \xi^{-1/4-n/2} (z - z_0)^{-1/4-3n/2} \text{ with } d_0 = 1/\sqrt{2} \quad (88)$$

という ansatz を置くのが妥当に見える. この ansatz を Airy 方程式 (87) に代入すると, $\exp[\mp \frac{i}{\hbar} \int^z dz \sqrt{Q}] = \exp[\mp \frac{i}{\hbar} \frac{2}{3} \xi^{1/2} (z - z_0)^{3/2} + \text{const.}]$ だから,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\hbar^2 \frac{d^2}{dz^2} + \xi(z - z_0) \right] \left(\exp \left[\mp \frac{i}{\hbar} \frac{2}{3} \xi^{1/2} (z - z_0)^{3/2} + \text{const.} \right] \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\pm i)^n \xi^{-1/4-n/2} (z - z_0)^{-1/4-3n/2} \hbar^n \right) \\ &= \exp \left[\mp \frac{i}{\hbar} \frac{2}{3} \xi^{1/2} (z - z_0)^{3/2} + \text{const.} \right] \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\pm i)^n \\ &\quad \times \left[(\pm i) 3n \xi^{1/4-n/2} (z - z_0)^{-3/4-3n/2} \hbar^{n+1} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3n}{2} \right) \left(\frac{5}{4} + \frac{3n}{2} \right) \xi^{-1/4-n/2} (z - z_0)^{-9/4-3n/2} \hbar^{n+2} \right] \\ &= \exp \left[\mp \frac{i}{\hbar} \frac{2}{3} \xi^{1/2} (z - z_0)^{3/2} + \text{const.} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-1/4-n/2} (z - z_0)^{-9/4-3n/2} \hbar^{n+2} (\pm i)^n \\ &\quad \times \left[-3(n+1)d_{n+1} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3n}{2} \right) \left(\frac{5}{4} + \frac{3n}{2} \right) d_n \right]. \quad (89) \end{aligned}$$

よって,

$$0 = -\frac{4}{3}(n+1)d_{n+1} + \left(n + \frac{1}{6} \right) \left(n + \frac{5}{6} \right) d_n \quad (90)$$

であれば良い. これを解くと,

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{3}{4} \frac{(n + \frac{1}{6} - 1)(n + \frac{5}{6} - 1)}{n} d_{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^2 \frac{(n + \frac{1}{6} - 1)(n + \frac{5}{6} - 1)(n - 1 + \frac{1}{6} - 1)(n - 1 + \frac{5}{6} - 1)}{n(n-1)} d_{n-2} \\ &= \dots \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n+5/6)}{\Gamma(1/6)\Gamma(5/6)} d_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n+5/6)}{n!} \quad (\because \Gamma(1/6)\Gamma(5/6) = 2\pi). \quad (91) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\psi_{\pm,n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n+5/6)}{n!} \times (\pm i)^n \xi^{-1/4-n/2} (z-z_0)^{-1/4-3n/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n+5/6)}{n!} \left(\mp i \frac{4}{3} \xi^{+1/2} (z-z_0)^{+3/2}\right)^{-n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n+5/6)}{n!} \left(\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}\right)^{-n} \quad (92)
\end{aligned}$$

である. ここで, $\frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n+5/6)}{n!} = (n-1)! \left(1 - \frac{5}{36}n^{-1} + \mathcal{O}(n^{-2})\right)$ ゆえに, n が十分に大きいときには,

$$\psi_{\pm,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} (n-1)! \left(\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}\right)^{-n} \quad (93)$$

と振舞って, $\psi_{\pm,n}$ は階乗発散することが確かめられる. つまり, WKB 展開は漸近級数であり, 厳密な意味では ill-defined あることが確かめられた.

WKB の漸近級数 $\psi_{\pm}(z; \hbar)$ が得られたので, Borel 変換 $\tilde{\psi}_{\pm}(z; \eta)$ を計算する. 定義 (83) から,

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(z; \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} \frac{\Gamma(n+1/6)\Gamma(n+5/6)}{n!} \left(\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}\right)^{-n}}{n!} \eta^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; \frac{\eta}{\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}}\right). \quad (94)
\end{aligned}$$

ここで, ${}_2F_1(a, b; c; z)$ は超幾何関数である:

$${}_2F_1(a, b; c; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (95)$$

先に進む前に超幾何関数は引数の $\frac{\eta}{\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}}$ が $+1$ から $+\infty$ のところにブランチカットを持ち, それ以外の場所では正則であることに注意する. このことは, 展開係数 $\psi_{\pm,n}$ の漸近形 (93) を使って Borel 変換を近似的に評価しておくと分かりやすい:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(z; \eta) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} (n-1)! \left(\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}\right)^{-n}}{n!} \eta^n \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} \ln \left(1 - \frac{\eta}{\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}}\right). \quad (96)
\end{aligned}$$

ここで, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ を使った. よって, Borel 変換 $\tilde{\psi}(z; \eta)$ は, z 平面の

$$\mathcal{C} := \left\{ z \mid 0 = \text{Im} \left[\frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')} \right] \right\} \quad (97)$$

なる線 (Stokes 線と呼ばれる) の上で \pm の符号のいずれかが必ず η 平面で $\eta \in [0, \infty]$ に特異性を持つ. Airy 方程式 (87) の場合は, $\int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')} \propto (z - z_0)^{3/2}$ なので, Stokes 線は z_0 を中心に図 2 のように 3 本生え, z 平面を 3 つの領域 $A = \text{I, II, III}$ に分ける (図 2 参照):

$$A = \begin{cases} \text{I} & \text{for } -\frac{\pi}{3} < \arg(z - z_0) + \frac{1}{3} \arg \xi < +\frac{\pi}{3} \\ \text{II} & \text{for } +\frac{\pi}{3} < \arg(z - z_0) + \frac{1}{3} \arg \xi < +\pi \\ \text{III} & \text{for } -\pi < \arg(z - z_0) + \frac{1}{3} \arg \xi < -\frac{\pi}{3} \end{cases} . \quad (98)$$

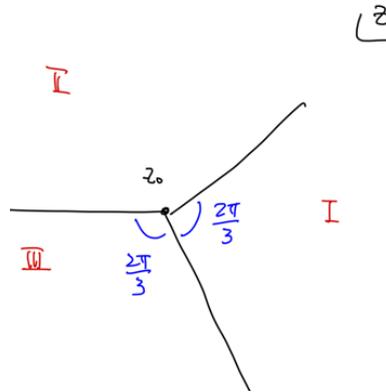


図 2: Airy ポテンシャル (87) に対する Stokes 線. Stokes 線は 3 つあるので, z 平面を 3 つの領域 I, II, III に分ける. $\int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')} \propto (z - z_0)^{3/2}$ で多価だから, どこかにブランチカットが刺さっているが, それは省略した.

Borel 変換は特異性を持つので, それに注意しながら Laplace 変換を実行して Borel 総和を実行する必要がある. 変数 z が Stokes 線 (97) の上にないときは, Laplace 変換は問題なく実行できる. 言い方を変えれば, Stokes 領域 I, II, III それぞれの領域の z では Borel 総和は well-defined に実行でき,

$$\Psi_{\pm}^A(z; \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z - z_0)^{-1/4} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} {}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; \frac{\eta}{\mp 2 \frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}} \right) \quad (A = \text{I, II, III}), \quad (99)$$

とそれに対応する Φ_{\pm}^A が well-defined な WKB 解を与える. Airy 関数 A_i の積分表示などを使ってがちゃがちゃやると, これが確かに Airy 関数 A_i に一致することを確認されるが, ここではあまり強調したいことでないのでやらない.

今強調したいことは, 領域 $A = \text{I, II, III}$ それぞれで得られた Borel 和は等しくないということである (Stokes 現象). これを見るため, 図 3 のようにある領域 A で得られた Borel 和 Φ_{\pm}^A を解析接続していった Stokes 線をまたいで違う領域 B に移ることを考える. z 平面を動かすと, Borel 変換の特異性も η 平面で動く (moving singularity). 先に述べたように, z が Stokes 線の真上に行ったときに η 平面の特異性は Laplace 変換の積分経路に当たる. 積分経路は特異性を通ることはできないから, 積分

$\frac{\pi}{3} + 0^+, = -\frac{\pi}{3} - 0^+ \rightarrow -\frac{\pi}{3} + 0^+$ と偏角が変化する瞬間, σ は,

$$\sigma : (\text{positive } \#) \times e^{-i0^+} \rightarrow (\text{positive } \#) \times e^{+i0^+} \text{ for I} \rightarrow \text{II}, \quad (102a)$$

$$\sigma : (-1) \times (\text{positive } \#) \times e^{-i0^+} \rightarrow (-1) \times (\text{positive } \#) \times e^{+i0^+} \text{ for III} \rightarrow \text{I}, \quad (102b)$$

と偏角が変化する. 超幾何関数の引数について

$$\frac{\eta}{\mp 2\frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')}} = \frac{\eta}{\pm 2\sigma} \in [1, \infty] \quad (103)$$

に特異性があるので, 超幾何関数の特異性を囲む積分経路 γ は,

$$\text{I} \rightarrow \text{II} : \begin{cases} \gamma : \frac{\eta}{+2\sigma} = e^{+i0^+} \times \infty \rightarrow 0 \rightarrow e^{-i0^+} \times \infty & \text{for } \delta\Phi_+^{\text{II}} \\ \gamma : \text{囲まない} & \text{for } \delta\Phi_-^{\text{II}} \end{cases}, \quad (104a)$$

$$\text{III} \rightarrow \text{I} : \begin{cases} \gamma : \text{囲まない} & \text{for } \delta\Phi_+^{\text{I}} \\ \gamma : \frac{\eta}{-2\sigma} = e^{+i0^+} \times \infty \rightarrow 0 \rightarrow e^{-i0^+} \times \infty & \text{for } \delta\Phi_-^{\text{I}} \end{cases}, \quad (104b)$$

のように特異性を囲む/囲まない. よって, $\delta\Phi_-^{\text{II}}$ と $\delta\Phi_+^{\text{I}}$ は直ちにゼロであることが分かる:

$$\begin{pmatrix} \delta\Phi_+^{\text{I}} \\ \delta\Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

残る $\delta\Phi_+^{\text{II}}$ と $\delta\Phi_-^{\text{I}}$ は非ゼロで, それは超幾何関数の性質,

$$\begin{aligned} & {}_2F_1(a, b; c; z + i0^+) - {}_2F_1(a, b; c; z - i0^+) \\ &= \frac{2\pi i}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (z-1)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) \text{ for } 1 < z \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (106)$$

を使ってガチャガチャ頑張ると評価できて,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\Phi_+^{\text{II}} \\ \delta\Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} &= e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} e^{\pm \frac{\sigma}{\hbar}} \int_{\gamma} \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; \frac{\eta}{\pm 2\sigma}\right) \\ &= e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} e^{\pm \frac{\sigma}{\hbar}} \\ &\quad \times \left[\int_{\frac{\eta}{\pm 2\sigma} = e^{+i0^+} \infty}^{\frac{\eta}{\pm 2\sigma} = 0} + \int_{\frac{\eta}{\pm 2\sigma} = 0}^{\frac{\eta}{\pm 2\sigma} = e^{-i0^+} \infty} \right] \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; \frac{\eta}{\pm 2\sigma}\right) \\ &= -e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} e^{\pm \frac{\sigma}{\hbar}} (\pm 2\sigma) \\ &\quad \times \left[\int_0^{e^{+i0^+} \infty} - \int_0^{e^{-i0^+} \infty} \right] \frac{du}{\hbar} e^{\mp 2\sigma u/\hbar} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; u\right) \\ &= -e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z-z_0)^{-1/4} e^{\pm \frac{\sigma}{\hbar}} (\pm 2\sigma) \\ &\quad \times \int_1^{\infty} \frac{du}{\hbar} e^{\mp 2\sigma u/\hbar} \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; u + i0^+\right) - {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; u - i0^+\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{\mp \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z - z_0)^{-1/4} e^{\pm \frac{\sigma}{\hbar}} (\pm 2\sigma) \\
&\quad \times \int_1^\infty \frac{du}{\hbar} e^{\mp 2\sigma u/\hbar} \underbrace{\frac{2\pi i}{\Gamma(1/6)\Gamma(5/6)}}_{=i} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; -u\right) \\
&= -ie^{\mp \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z - z_0)^{-1/4} e^{\mp \frac{\sigma}{\hbar}} (\pm 2\sigma) \int_0^\infty \frac{du}{\hbar} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; 1-u\right) \quad (107)
\end{aligned}$$

となる. ところで, 式 (102) から領域 I,II と III,I の境界ではそれぞれ $\sigma > 0, < 0$ だったから,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Phi_-^{\text{II}} \\ \Phi_+^{\text{I}} \end{pmatrix} &= e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z - z_0)^{-1/4} e^{\mp \frac{\sigma}{\hbar}} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\hbar} e^{-\eta/\hbar} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; \underbrace{\frac{\eta}{\mp 2\sigma}}_{:= -u \text{ with } u > 0}\right) \\
&= e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/4} (z - z_0)^{-1/4} e^{\mp \frac{\sigma}{\hbar}} (\pm 2\sigma) \int_0^\infty \frac{du}{\hbar} e^{\mp 2\sigma u/\hbar} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; -u\right) \\
&= +i \times e^{\pm 2\frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \times \begin{pmatrix} \delta\Phi_+^{\text{II}} \\ \delta\Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad (108)
\end{aligned}$$

と分かる. よって, 特異性による寄与によって, Stokes 線を (反時計回りに) またぐときに,

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{I}} \\ \Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{II}} \\ \Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\Phi_+^{\text{II}} \\ \delta\Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +ie^{-2\frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{II}} \\ \Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix}, \quad (109a)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{III}} \\ \Phi_-^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{I}} \\ \Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\Phi_+^{\text{I}} \\ \delta\Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +ie^{+2\frac{i}{\hbar} \int^{z_0} dz' \sqrt{Q(z')}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{I}} \\ \Phi_-^{\text{II}} \end{pmatrix}, \quad (109b)$$

というジャンプが起こることが分かった (Stokes 現象). ここで, I,II の境界の Stokes 線上で $\text{Re} \left[i \int_{z_0}^z dz' \sqrt{Q(z')} \right] < 0$ で, III,I の Stokes 線上で > 0 であることに注意. この符号は接続行列の非対角項のどれが非ゼロになるかを定める. つまり, ≤ 0 ならば, Φ_\pm^A が Φ_\mp^B と混じるが, Φ_\pm^A は何も変化しない.

4.1.4 一般の場合

Airy 方程式 (87) の場合に, Borel 和を解析接続をしてゆくと Stokes 線をまたぐところで式 (109) のような Stokes 現象が起こることを完全 WKB の観点で示した. これは一般の場合にも正しく, 以下のような定理が成り立つことが知られている (証明はしない⁴³):

定理 (1): 式 (75) の形をした 2 階微分方程式でポテンシャル Q が正則ならば, WKB 解は Stokes 線,

$$\mathcal{C}[z_{\text{tp}}] := \left\{ z \mid 0 = \text{Im} \left[\frac{i}{\hbar} \int_{z_{\text{tp}}}^z dz' \sqrt{Q(z')} \right] \right\} \quad (110)$$

⁴³田屋の力量のため. 例えば, [WKB 変換論](#) を使うと, 一般のポテンシャルが適切な条件の下で Airy ポテンシャルに変換できることが証明されているらしいのだが, ちゃんと理解できていない. 詳しい人は教えてください.

をまたぐときに Stokes 現象が起こる. ここで, z_{tp} は変わり点と呼ばれ⁴⁴,

$$0 = Q(z_{\text{tp}}) \quad (111)$$

なる点のこと⁴⁵.

定理 (2): ポテンシャル Q は $Q'(z_{\text{tp}}) \neq 0$ (つまり, 変わり点の近傍で Airy ポテンシャルのように振舞う) を満たし, さらに, Stokes 線 $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}]$ は相異なる Stokes 線と縮退していないとする. このとき, Stokes 線 $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}]$ を変わり点 z_{tp} からみて反時計回りにまたぎ, 領域 A から B に移るときの Stokes 現象は次の接続行列によって表現できる⁴⁶:

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^B \\ \Phi_-^B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \Theta(-s) \times (-i)e^{s\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} \\ \Theta(s) \times (-i)e^{s\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} & 1 \end{pmatrix}}_{:=T_{\text{Airy}}[z_{\text{tp}}]} \begin{pmatrix} \Phi_+^A \\ \Phi_-^A \end{pmatrix}. \quad (113)$$

ここで,

$$\sigma[z_{\text{tp}}] := 2i \int^{z_{\text{tp}}} dz' \sqrt{Q(z')}, \quad s := \text{sgn Re} \left[i \int_{z_{\text{tp}}}^{z \in \mathcal{C}[z_{\text{tp}}]} dz' \sqrt{Q(z')} \right] \quad (114)$$

を導入した.

以上の2つの定理は, Stokes 現象を系統的に議論する処方を与える:

- (i) Stokes 図を書き下す. つまり, ポテンシャル Q が持つ変わり点を同定し, そこから伸びる Stokes 線の位置関係を調べる.
- (ii) 2つの領域を結ぶ経路を適当に書く.
- (iii) 経路に当たる Stokes 線の接続行列をすべてかけ合わせれば, 2つの領域の間の WKB 解 (Borel 和) の関係が分かる.

4.1.5 Schwinger 機構への応用

以上の完全 WKB の議論を Schwinger 機構による粒子生成に応用する. 節 3 で述べたように, 粒子生成の物理は Bogoliubov 係数を求める問題に帰着される. 式 (41) の下で言及したように, Bogoliubov 係数は無限の過去に用意した正方向に用意した平面波が, 無限の未来でどれくらい正方向と負方向の

⁴⁴DDP 公式の文脈だと “critical point” に厳密に対応する (例えば, 岡 [188] を参照).

⁴⁵一般にポテンシャル Q が極を持つ場合, 極からも Stokes 線は伸び得る (例えば, この文献とか). が, 今回は考えないことにする. 一般のポテンシャル Q は極を持つ (例: Sauter 電場) ので, これが粒子生成にどう影響するのかは考える価値があるかもしれない. 福嶋-島崎 [38] が関連する議論をしていたと思う.

⁴⁶

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^A \\ \Phi_-^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Theta(-s) \times ie^{s\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} \\ \Theta(s) \times ie^{s\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_+^B \\ \Phi_-^B \end{pmatrix} \quad (112)$$

と同値.

平面波の混じりあいになっているか、ということを表すのであった。無限の過去と未来では電場は漸近的に切れると思っているので、WKB 解は普通の平面波に漸近する。したがって、無限の過去に用意した Borel 和 Φ_{\pm}^{in} を正の時間方向に解析接続して行って、無限の未来でどのように Φ_{\pm}^{in} と Φ_{\pm}^{out} が混じりあって Φ_{\pm}^{out} を作っているのかが分かれば Bogoliubov 係数が分かる。式で書けば [式 (41) に対応]

$$\Phi_{\pm}^{\text{out}}(t = +\infty) = \alpha \Phi_{\pm}^{\text{in}}(t = +\infty) + \beta \Phi_{\mp}^{\text{in}}(t = +\infty) \quad (115)$$

である。4.1.4 節で述べた処方 (i)-(iii) にしたがって Bogoliubov 係数の α と β を求める。基本的には単純な拡張なのだが、(i) で Stokes 図を同定するとどうしても縮退した Stokes 線が出てくることになって、(iii) をやるときの接続行列に注意や近似が必要になる。これを具体的に見てゆく。

(i) Stokes 図を書き下す。

Schwinger 機構のときは $Q = \omega_p^2 = m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$ だが、このポテンシャルに対する Stokes 図は一般的に図 4 のような形をする。より一般的には、式 (75) のような形をした 2 階微分方程式があって、ポテンシャル Q が、(1) 実軸上で正の値を取り $Q(t \in \mathbb{R}) > 0$ 、(2) 複素 z 平面上の至る所で正則である、という 2 つの条件を満たすときには、Stokes 図は図 4 のような形をする。これを示す。

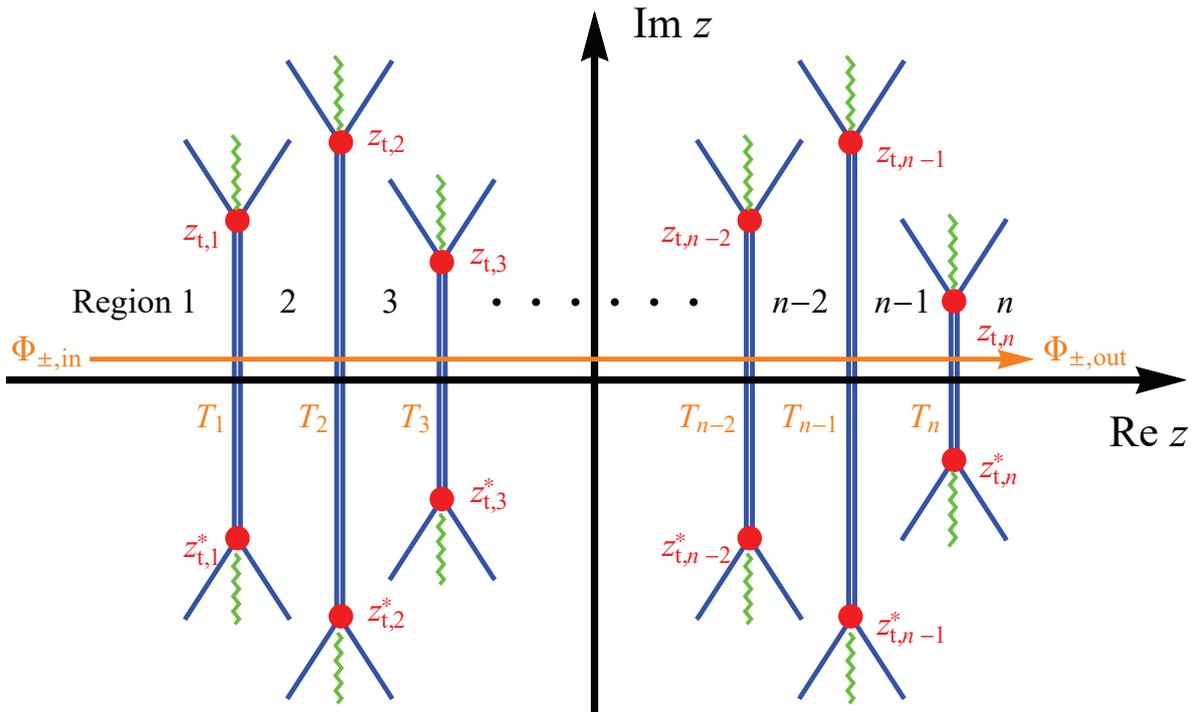


図 4: Schwinger 機構に対する Stokes 図の一般的な構造。赤点は変わり点、青線は Stokes 線、緑線はブランチカットを表す。(z_{tp} , z_{tp}^*) を結ぶ Stokes 線は縮退している。オレンジ線は無限の過去と未来を結ぶ経路 (の 1 例)。なお、一般には実軸を通っている縮退した Stokes 線たちは曲線でも良いが、簡単のために直線で書いた。

性質 (1): Stokes 図は上下対称である。つまり、 $\text{Im } z \leftrightarrow -\text{Im } z$ の変換に対して対称である。

(証明) ポテンシャル Q は正則で実軸上で実の値を取るので, Schwarz の鏡像原理から $[Q(z)]^* = Q(z^*)$ が成立する. よって, z_{tp} が変わり点 $Q(z_{\text{tp}}) = 0$ ならば, $Q(z_{\text{tp}}^*) = 0$ より z_{tp}^* も変わり点. また, とある点 z が Stokes 線 $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}]$ にのっているのであれば, その複素共役の z^* は z_{tp}^* から延びる Stokes 線 $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}^*]$ にのっていないといけない: $0 = \text{Im} \left[i \int_{z_{\text{tp}}}^z dz' \sqrt{Q(z')} \right] \Rightarrow 0 = \text{Im} \left[\left(i \int_{z_{\text{tp}}}^z dz' \sqrt{Q(z')} \right)^* \right] = -\text{Im} \left[i \int_{z_{\text{tp}}^*}^{z^*} dz' \sqrt{Q(z')} \right]$. 以上のことは Stokes 図が上下対称であることを意味する.

性質 (2): とある変わり点 z_{tp} に対し $0 \neq (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(z_{\text{tp}})) \cdot e\mathbf{E}(z_{\text{tp}})$ を満たすならば, その変わり点からは Stokes 線が 3 本出ている.

(証明) 変わり点の近傍 $z \sim z_{\text{tp}}$ でポテンシャル Q をテイラー展開すると,

$$\begin{aligned} Q(z) &= Q(z_{\text{tp}}) + Q'(z_{\text{tp}})(z - z_{\text{tp}}) + \mathcal{O}(|z - z_{\text{tp}}|^2) \\ &= 2(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(z_{\text{tp}})) \cdot e\mathbf{E}(z_{\text{tp}}) \times (z - z_{\text{tp}}) + \mathcal{O}(|z - z_{\text{tp}}|^2). \end{aligned} \quad (116)$$

よって, $0 \neq (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(z_{\text{tp}})) \cdot e\mathbf{E}(z_{\text{tp}})$ ならば変わり点に近傍では Airy ポテンシャルのように振舞う. Airy ポテンシャルからは図 2 のように 3 本 Stokes 線が出る. なお, WKB 解の位相 $i \int^z dz' \sqrt{Q(z')} \propto (z - z_{\text{tp}})^{3/2}$ は変わり点の近傍で多価になっているので, 変わり点から 1 本ブランチカットも伸びる. ブランチカットの入れ方は原理的にはなんでも良いが, 実軸をブランチカットが横切ると実時間発展の途中に Riemann 面を行ったり来たりすることになってあきらかに見通しが悪いので, ブランチカットは実軸を横切らずに無限遠点に逃げるように入れることにする.

性質 (3): Stokes 線は違う変わり点に当たらない限り勝手に分裂したりしない.

(証明) Stokes 線の定義 (110) から, ある点 z の Stokes 線は, $dz \propto i\sqrt{Q(z)}$ の方向に進まなければならない. よって, 分裂しない. $Q(z) = 0$ (または特異点になっている) のときは dz の方向が定まらないので, Stokes 線は一般に分裂することができ, それは積分 $\int_{z_{\text{tp}}}^z dz' \sqrt{Q(z')}$ の多価性で決まる.

性質 (4): とある変わり点 z_{tp} とその複素共役 z_{tp}^* は縮退した Stokes 線 (Stokes segment と呼ぶことにする⁴⁷) で結ばれている.

(証明) $0 = \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^z \sqrt{Q} dz]$ (点 z が Stokes 線 $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}]$ にのっている) ならば $0 = \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}^*}^z \sqrt{Q} dz]$ (点 z は Stokes 線 $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}^*]$ にものっている) であることを示せばよい. $\text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}^*}^z \sqrt{Q} dz] = \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^z \sqrt{Q} dz] - \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}^*}^{z_{\text{tp}}} \sqrt{Q} dz]$ だから, $0 = \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}^*}^{z_{\text{tp}}} \sqrt{Q} dz]$ であることを示せば十分. Schwarz の鏡像原理から $[Q(z)]^* = Q(z^*)$ だから, $[+i \int_{z_{\text{tp}}^*}^{z_{\text{tp}}} \sqrt{Q} dz]^* = +i \int_{z_{\text{tp}}}^{z_{\text{tp}}^*} \sqrt{Q} dz$. よって, $\text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}^*}^{z_{\text{tp}}} \sqrt{Q} dz] = 0$ より命題は示された.

性質 (5): 変わり点のペア $(z_{\text{tp}}, z_{\text{tp}}^*)$ を結ぶ Stokes segment は実軸を必ず 1 回だけ横切る.

(証明) z_{tp} から適当な点 $t_0 \in \mathbb{R}$ まで線をのぼしたとき, Stokes 線を定める積分の虚部は一般には非ゼロである: $0 \neq \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^{t_0} \sqrt{Q} dz]$. 今, 非積分関数 $+i\sqrt{Q}$ は実軸上で正の純

⁴⁷文献を見ている限りは, これが必ずしも一般的な呼び方ではないように感じるが, 完全 WKB をやっている日本の数学の人たちはこう呼ぶことが多いように見えるので, ここでもそう呼ぶことにする.

虚数を取るから, t_0 から正/負の実軸方向へ積分すると, それは単調に虚部を増や/減らし, $\pm\infty$ まで行くと $0 \neq \text{Im}[+i \int_{t_0}^{\pm\infty} \sqrt{Q} dz] = \pm i\infty$ となる. よって, 積分の中間値の定理より, $\text{Im}[+i \int_{t_0}^{t_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz] = -\text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^{t_0} \sqrt{Q} dz]$ なるような点 t_{cr} が必ず存在し, それは虚部の単調性から唯一である. このとき $\text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^{t_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz] = \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^{t_0} \sqrt{Q} dz] + \text{Im}[+i \int_{z_0}^{t_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz] = 0$ より, Stokes segment は t_{cr} で実軸を横切る.

性質 (6): Stokes segment 以外の Stokes 線は実軸を横切ることはない.

(証明) Stokes segment 以外の線が実軸を横切ったと仮定する. Stokes segment と同じ t_{cr} で実軸を横切るとすると, それは Stokes 線が t_{cr} で分裂しているか, 3重に縮退しまっている, ということになるが, 分裂は性質 (3) からあり得ないし, 3重縮退すると性質 (2) の変わり点から 3本延びる, という性質を満たせなくなるのでダメ. よって, $t_{\text{cr}} \neq t'_{\text{cr}}$ なるどこか違う点で実軸を横切る. そのような点 t'_{cr} が存在するならば, Stokes 線の定義から $0 = \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^{t_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz] = \text{Im}[+i \int_{z_{\text{tp}}}^{t'_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz]$ となっていなければならない. これは矛盾を導く. Q は正則なので, Cauchy の積分定理から, $0 = +i \int_{z_{\text{tp}}}^{t_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz + i \int_{t_{\text{cr}}}^{t'_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz + i \int_{t'_{\text{cr}}}^{z_{\text{tp}}} \sqrt{Q} dz$ でなければならないので, $0 = \text{Im}[+i \int_{t_{\text{cr}}}^{t'_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz]$ となってしまうが, 実軸上で $\sqrt{Q} > 0$ だから $0 \neq \text{Im}[+i \int_{t_{\text{cr}}}^{t'_{\text{cr}}} \sqrt{Q} dz]$. よって, 背理法から Stokes segment 以外の Stokes 線は実軸を横切ることはない.

以上の性質をまとめると, 図 4 を得る. 細かいことを言えば, 性質 (2) の条件 $0 \neq (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(z_{\text{tp}})) \cdot e\mathbf{E}(z_{\text{tp}})$ は必ずしも満たされないので, 最も一般的なケースを考えると, 変わり点から 3本以上 Stokes 線が生えることもありえる. しかし, 物理的には, 物理は運動量 \mathbf{p} に対して連続なので, $0 = (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(z_{\text{tp}})) \cdot e\mathbf{E}(z_{\text{tp}})$ となってしまうときには \mathbf{p} を微小量ズラして性質 (2) を満たすようにした状況を考えれば十分である.

(ii) 経路を書く.

無限の過去と未来の Borel 和の関係を知りたいので, 無限の過去と未来の領域を繋ぐ経路を適当に決める. ここでは図 4 のように実軸をまっすぐ突っ切るような経路を考える. この経路のメリットは, 粒子生成の実時間発展がなんとなくわかるような気がしてうれしいことである (3 節で議論したように外場中の粒子描像は厳密には定めることができないので, あくまで気持ちに過ぎないが). 原理的には虚軸方向に弧を描くように無限の過去と未来を結んでも良いが, このときにはブランチカットをどうしても横切って違う Riemann 面に行ってしまうので, ちょっと都合が悪い.

(iii) 接続行列を掛け合わせる.

図 4 の経路を選ぶと, Stokes segment をたくさん横切ることになる. よって, Stokes segment に対応した接続行列を $T_{\text{seg}}[z_{\text{tp}}]$ と書くことにすれば,

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{out}} \\ \Phi_-^{\text{out}} \end{pmatrix} = T_{\text{seg}}[z_{\text{tp},1}] T_{\text{seg}}[z_{\text{tp},2}] \cdots T_{\text{seg}}[z_{\text{tp},n}] \begin{pmatrix} \Phi_+^{\text{in}} \\ \Phi_-^{\text{in}} \end{pmatrix} \quad (117)$$

となる. したがって, メインの問題は $T_{\text{seg}}[z_{\text{tp}}]$ を求めることに帰着する.

田屋の知る限りは, Stokes 線が縮退した Stokes segment に対する接続行列 T_{seg} は近似的にしか求まらないのが現状で, これが今回説明している完全 WKB 的なアプローチの限界を決めている. このこ

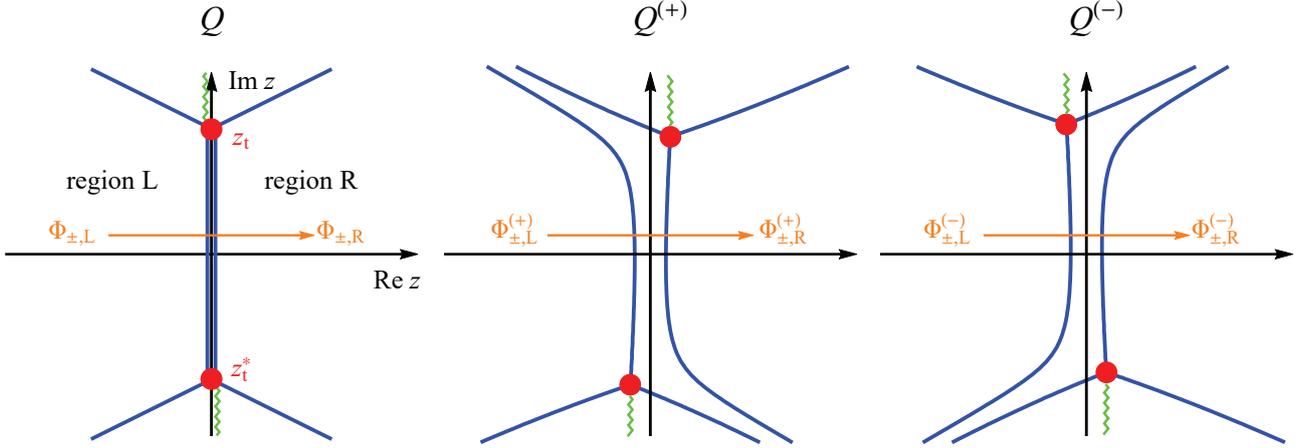


図 5: ポテンシャル Q に対する摂動 $Q \rightarrow Q^{(\pm)}$ で Stokes segment の縮退がほどける様子.

とを, 縮退していないときの接続行列 T_{Airy} (113) を使って議論する. そのためにまず, Stokes segment が Schwinger 機構の Stokes 図に現れていたのは, 性質 (4) のためだったことを思い出す. 性質 (4) が成り立っていたのは, Schwarz の鏡像原理 $[Q(z)]^* = Q(z^*)$ のために Stokes 図が上下の対称であったことが肝であった. したがって, 摂動を加えてこの対称性を壊せば, Stokes segment の縮退はほどけて縮退していない 2 本の Stokes 線になるものと期待される. そのような摂動として, Q に小さな虚部を足すことを考える (場の理論の $i\epsilon$ 処方みたいなもの):

$$Q(z) \rightarrow Q^{(\pm)}(z) := Q(ze^{\pm i\delta}) \text{ with } \delta \rightarrow 0^+, \quad (118)$$

このときの対応する Borel 和と Stokes segment の接続行列を

$$\Phi_{\pm} \rightarrow \Phi_{\pm}^{(\pm)}, \quad T \rightarrow T^{(\pm)} \quad (119)$$

と書くことにする. 摂動を受けると, 変わり点 z_{tp} (の実部) は, $0 = Q(z_t) \Leftrightarrow 0 = Q^{(\pm)}(z_t \times e^{\mp i\delta})$ だから,

$$\begin{aligned} \text{Re } z_{\text{tp}} &\rightarrow \text{Re } [z_{\text{tp}} \times e^{\mp i\delta}] \sim \text{Re } z_{\text{tp}} \pm 0^+ \times \text{Im } z_{\text{tp}}, \\ \text{Re } z_{\text{tp}}^* &\rightarrow \text{Re } [z_{\text{tp}}^* \times e^{\mp i\delta}] \sim \text{Re } z_{\text{tp}} \mp 0^+ \times \text{Im } z_{\text{tp}} \end{aligned} \quad (120)$$

と動く. つまり, 上下の変わり点は逆に動くので, 上下に対する対称性が図 5 のように壊れ, Stokes segment の縮退が解ける. 以降, 上半面の変わり点を z_{tp} と呼ぶことにする. このとき, 縮退が解けた後の Stokes 線は以下の性質を満たす:

$$\text{sgn} \left[+i \int_{z_{\text{tp}}}^{z \in \mathcal{C}[z_{\text{tp}}]} \sqrt{Q(z')} dz' \right] = -\text{sgn} \left[+i \int_{z_{\text{tp}}^*}^{z \in \mathcal{C}[z_{\text{tp}}^*]} \sqrt{Q(z')} dz' \right] > 0. \quad (121)$$

なぜならば, Stokes 線は定義 (110) から, $dz \propto -i[\sqrt{Q}]^*$ の方向に動くので, 積分の実部 $\text{Re } +i \int_{z_{\text{tp}}}^{z \in \mathcal{C}[z_{\text{tp}}]} \sqrt{Q(z')} dz'$ は変わり点から単調増加または減少し続ける. z_{tp} (z_{tp}^*) からのびる Stokes 線 $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}]$ ($\mathcal{C}[z_{\text{tp}}^*]$) は実軸を上から (下から) 横切る, つまり, $dz \propto -i(\alpha + i)$. よって, 実軸のところでは, $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}]$ ($\mathcal{C}[z_{\text{tp}}^*]$) の実部は $-i \times (+i)\sqrt{Q} > 0$ ($+i \times (+i)\sqrt{Q} < 0$) となって, $\mathcal{C}[z_{\text{tp}}]$ ($\mathcal{C}[z_{\text{tp}}^*]$) は積分の実部が単調増大 (減少) する

ような Stokes 線になっているのが分かる. さて, 式 (121) によって, T_{Airy} (113) に出てくる s が定まった. 今, 図 5 のように左から縮退がほどけた Stokes segment を超えて右に移るような Borel 和を考えれば, この接続行列は T_{Airy} を 2 発当てたもので書けるので,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \Phi_{+,R}^{(+)} \\ \Phi_{-,R}^{(+)} \end{array} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ie^{+\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & +ie^{-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= T^{(+)[z_{\text{tp}}]} } \left(\begin{array}{c} \Phi_{+,L}^{(+)} \\ \Phi_{-,L}^{(+)} \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{c} \Phi_{+,R}^{(-)} \\ \Phi_{-,R}^{(-)} \end{array} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & +ie^{-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -ie^{+\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} & 1 \end{pmatrix}}_{= T^{(-)[z_{\text{tp}}]} } \left(\begin{array}{c} \Phi_{+,L}^{(-)} \\ \Phi_{-,L}^{(-)} \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (122)$$

となる. ここで, $\sigma[z_{\text{tp}}] - \sigma[z_{\text{tp}}^*] = 2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]$ を使えば,

$$T^{(\pm)}[z_{\text{tp}}] = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar}}{2} \mp \frac{e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar}}{2} & +ie^{-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} \\ -ie^{+\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} & 1 + \frac{e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar}}{2} \pm \frac{e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar}}{2} \end{pmatrix} \quad (123)$$

である. $\operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}] = +i \int_{z_{\text{tp}}}^{z_{\text{tp}}^*} \sqrt{Q(z')} dz'$ は式 (121) より正の実数であることに注意する.

式 (123) には問題が生じている: δ は人間が勝手に挿入したパラメーターなので, $\delta \rightarrow 0$ で $T^{(+)} = T^{(-)}$ が成り立ってほしい. さもなくば Stokes segment に対する接続行列 T は一意的に定義できないことになる. しかし, 式 (123) の対角項はそうっておらず, $\mathcal{O}(e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar})$ のオーダーで $T^{(+)} \neq T^{(-)}$ になってしまう. このように Stokes segment があると一般に完全 WKB はバグってしまう⁴⁸. その一方で, このバグり具合は $\mathcal{O}(e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar})$ のオーダーであり, $\hbar \rightarrow 0$ とする形式的な半古典極限においては無視できる. よって,

$$T[z_{\text{tp}}] = \begin{pmatrix} 1 & +ie^{-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} \\ -ie^{+\sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar} & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}) \quad (124)$$

である⁴⁹.

求まった接続行列 (124) を式 (117) に代入すると, $\sigma[z_{\text{tp}}] - \sigma[z_{\text{tp}}^*] = 2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]$ に注意して,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \Phi_+^{\text{out}} \\ \Phi_-^{\text{out}} \end{array} \right) &= \prod_{i=1}^n \left[\begin{pmatrix} 1 & +ie^{-\sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar} \\ -ie^{+\sigma[z_{\text{tp},i}]/\hbar} & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar}) \right] \left(\begin{array}{c} \Phi_+^{\text{in}} \\ \Phi_-^{\text{in}} \end{array} \right) \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & +i \sum_{i=1}^n e^{-\sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar} \\ -i \sum_{i=1}^n e^{+\sigma[z_{\text{tp},i}]/\hbar} & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar}) \right] \left(\begin{array}{c} \Phi_+^{\text{in}} \\ \Phi_-^{\text{in}} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (125)$$

⁴⁸Fixed singularity と呼ばれる, Airy のときとは違う性質をもった厄介な特異性が現れることに起因する. 例えば, 竹井に関連する議論がある.

⁴⁹現存する半古典近似の計算は, 田屋が知る限りすべて $\mathcal{O}(e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar})$ はネグっているので, 式 (124) の $\mathcal{O}(e^{-2 \operatorname{Re} \sigma[z_{\text{tp}}]/\hbar})$ がちゃんと定まれば結構うれしいと思うが, やり方がわからない. Worldline instanton 法だと, インスタントアクションがでかくなるような高次の配位まで全部書き下せばよいだけなので, 原理的には worldline instanton 法の方がこの問題に対しては楽かもしれない. DDP 法は本質的には鞍点法なのだけど, 鞍点法に持ち込む前に $\alpha \sim 1$ みたいなノリの近似を使うので, このノリをちゃんと評価しないとイケないのが大変そうに個人的には見える.

これと式 (115) を見比べると,

$$\alpha = 1 + \mathcal{O}(e^{-2\text{Re}\sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar}), \quad \beta = +i \sum_{i=1}^n e^{-\sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar} + \mathcal{O}(e^{-2\text{Re}\sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar}) \quad (126)$$

を得る. Bogoliubov 係数 β を二乗したものが粒子生成数を与えるから [式 (48)],

$$\begin{aligned} \frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} &= \left| \sum_{i=1}^n e^{-\sigma[z_{\text{tp},i}^*]/\hbar} \right|^2 + \mathcal{O}(e^{-3\text{Re}\sigma[z_{\text{tp},i}]/\hbar}) \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \exp \left[-2i \int^{z_{\text{tp},i}^*} dz \omega_{\mathbf{p}}(z) \right] \right|^2 + \mathcal{O}(e^{-3\text{Re}\sigma[z_{\text{tp},i}]/\hbar}) \end{aligned} \quad (127)$$

を最終的に得る (ここで, $z_{\text{tp},i}^*$ は, 下半面にある i 番目の変わり点であることを忘れないためにメモしておく)⁵⁰. これが粒子生成の物理で広く使われている半古典近似の公式である. 直感的には, 粒子生成は Stokes segment が実軸と交差する $t_{\text{cr},i}$ で起きて, それぞれでの粒子生成の確率振幅は $\exp \left[-2i \int^{z_{\text{tp},i}^*} dz \omega_{\mathbf{p}}(z) \right]$ で与えられる, ということを行っている. ここで, 確率振幅をすべて足し上げた後に二乗を取っているので, 別々の粒子生成のイベントと量子干渉が起こり得ることに注意. 一般の場合に確立振幅の積分を解析的に実行し切るのは難しいが, 非常にラフな気持ちとしては, $I z_{\text{tp}}$ の大きさで粒子生成は指数関数的に抑制されていると言っても過言ではない. というのは, 質量がそこそこ大きいと思えば, $\omega_{\mathbf{p}}(z) \sim m$ なので,

$$\exp \left[-2i \int^{z_{\text{tp},i}^*} dz \omega_{\mathbf{p}}(z) \right] \sim (\text{phase}) \times e^{-2m \text{Im} z_{\text{tp},i}} \quad (128)$$

となる (もちろんこれは雑な評価なので定量的にそこまで正確ではないが, prefactor の係数をミスるくらいで大雑把には正しい).

4.2 半古典近似の公式からわかること

半古典近似の公式 (127) からわかる物理を簡単に議論する.

4.2.1 チェック: 定常電場の結果を再現すること

その前に簡単に定常電場の場合に正しい結果を与えることを見る. 3方向を電場の向きに取れば, $\omega_{\mathbf{p}}(z) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 + (p_3 + eEz)^2}$ であるから, 下半面にある変わり点は,

$$z_{\text{tp}}^* = \frac{-p_3 - i\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2}}{eE} \quad (129)$$

⁵⁰フェルミオンの場合は, $(-1)^i$ の位相因子が式 (127) に加わると考えられているが [99], これがちゃんと証明されているのか田屋は知らない. たぶん円偏光しているような電場の場合には単に位相因子をつけるだけでは済まないと思う.

の1個だけである。このとき、

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]] &= \operatorname{Re}\left[-2i \int_{z_{\text{tp}}}^{z_{\text{tp}}^*} dz \sqrt{(eE)^2(z - z_{\text{tp}})(z - z_{\text{tp}}^*)}\right] \\
&= -i\sqrt{eE} \int_{z_{\text{tp}}}^{z_{\text{tp}}^*} dz \sqrt{(eE)^2(z - z_{\text{tp}})(z - z_{\text{tp}}^*)} \\
&= -ieE \times (-i)\pi(\operatorname{Im}z_{\text{tp}})^2 \\
&= -\frac{\pi}{2} \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{eE}
\end{aligned} \tag{130}$$

となる。よって、半古典近似の公式(127)から、

$$\begin{aligned}
\frac{d^3N}{d\mathbf{p}^3} &= \left|e^{-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}\right|^2 + \mathcal{O}(e^{-3\operatorname{Re}\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}) \\
&= e^{2\operatorname{Re}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar]} + \mathcal{O}(e^{-3\operatorname{Re}\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}) \\
&= e^{-\pi \frac{m^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{\hbar eE}} + \mathcal{O}(e^{-3\operatorname{Re}\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar})
\end{aligned} \tag{131}$$

である。これはたしかに3.4節の結果を厳密に再現する。半古典近似は電場の時間変調の遅さと関係していたから[式(75)の下の議論]、電場が遅い極限である定常電場のときに正しい結果を再現できるのはもっともな結果である。

4.2.2 非摂動と摂動の移り変わり

半古典近似の公式(127)を使えば、電場を早くしてゆくときに、粒子生成のパラメータ依存性が摂動的になってゆくさまを議論することができる。具体例として、 $E(t) = E_0 \sin \omega t$ のように周期的に変動する電場を考え⁵¹、さらに簡単のために $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ を考える。ゲージポテンシャルは $A = E_0 \frac{\cos \omega t}{\omega}$ なので、変わり点 z_{tp} は

$$0 = m^2 + \left(eE_0 \frac{\cos \omega z}{\omega}\right)^2 \tag{132}$$

を解くことで決定される。解くと、

$$\omega z_{\text{tp},n} = \cos^{-1}(-i\gamma) + n\pi = n\pi + \begin{cases} \frac{\pi}{2} + i \ln 2\gamma + \mathcal{O}(\gamma^{-2}) & (\gamma \gg 1) \\ \frac{\pi}{2} + i\gamma + \mathcal{O}(\gamma^2) & (\gamma \ll 1) \end{cases}. \tag{133}$$

ここで、

$$\gamma := \frac{m\omega}{eE_0} \tag{134}$$

⁵¹うるさいことを言うと、振動電場の場合は系が周期的なので、周期性をどうやって破って電場が切れた漸近状態を用意するのか、ということが実は大きな問題になる。数値的に計算してみると、この電場の切り方によって粒子生成数はかなり大きく影響を受ける。ここでの議論は、Brezin-Izykson [33]が行った古典的で業界で広く受け入れられている議論に基づく一方、漸近状態の作り方に注意を払っていないので実は結構怪しい計算である。また、周期電場のように粒子生成が何回も起きる系では後で議論する量子干渉の方が大事になってくるので、そういう意味でも実はあまりいい例ではない。

は Keldysh パラメータである. ここで $\gamma \gg 1$ のときに冪かログかの依存性が違うということが大事である. というのは, 半古典近似の範囲での確立振幅は, 式 (128) で述べたように, z_{tp} の虚部の大きさがおおよそ決めるので, それが冪かログかの依存性が違うということは粒子生成の抑制度合いが大分変わってくる:

$$\begin{aligned} e^{-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]} &= \exp \left[-2i \int^{z_{\text{tp},n}^*} dz \omega_{\mathbf{p}}(z) \right] \sim (\text{phase}) \times e^{-2m \text{Im} z_{\text{tp},n}} \\ &= \begin{cases} (\text{phase}) \times e^{-2\frac{m}{\omega} \ln 2\gamma} & (\gamma \gg 1) \\ (\text{phase}) \times e^{-2\frac{m}{\omega} \gamma} & (\gamma \ll 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\text{phase}) \times \left(\frac{2eE_0}{m\omega} \right)^{-2\frac{m}{\omega}} & (\gamma \gg 1) \\ (\text{phase}) \times e^{-2m^2/eE_0} & (\gamma \ll 1) \end{cases}. \end{aligned} \quad (135)$$

より, 粒子生成は γ によって指数関数的抑制 (非摂動的) か冪的な抑制 (摂動的) かが変わってくる. もう少し真面目にやると, 積分をちゃんと実行すれば,

$$\begin{aligned} -\sigma[z_{\text{tp},n}^*] &= -2i \int^{z_{\text{tp},n}^*} dz \omega_{\mathbf{p}}(z) \\ &= -2i \frac{eE_0}{\omega} \int^{\frac{1}{\omega} \cos^{-1}(+i\gamma) + \frac{n\pi}{\omega}} dz \sqrt{\gamma^2 + \cos^2 \omega z} \\ &= -2i \frac{eE_0}{\omega} \int^{\frac{\pi}{\omega}(n+\frac{1}{2})} dz \sqrt{\gamma^2 + \cos^2 \omega z} + (-2i) \frac{eE_0}{\omega} \int^{\frac{1}{\omega} \cos^{-1}(+i\gamma) + \frac{n\pi}{\omega}} dz \sqrt{\gamma^2 + \cos^2 \omega z} \\ &= \underbrace{-2i \frac{eE_0}{\omega} \int^{t_{\text{cr},n}} dz \sqrt{\gamma^2 + \cos^2 \omega z}}_{= i \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]]} + \underbrace{(-2i) \frac{eE_0}{\omega} \int_0^{\frac{1}{\omega} \cos^{-1}(+i\gamma) - \frac{\pi}{2\omega}} dz \sqrt{\gamma^2 + \sin^2 \omega z}}_{= \text{Re}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]]} \\ &= i \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]] - 2 \frac{eE_0}{\omega} \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\omega} \left[\text{E} \left(\frac{1}{1+\gamma^{-2}} \right) - \text{K} \left(\frac{1}{1+\gamma^{-2}} \right) \right] \\ &= i \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]] - \frac{\pi}{2} \frac{m^2}{eE_0} \times \begin{cases} \frac{4}{\pi} \gamma^{-1} (\ln 4\gamma - 1) + \mathcal{O}(\gamma^{-1}) & (\gamma \gg 1) \\ 1 + \mathcal{O}(\gamma) & (\gamma \ll 1) \end{cases} \\ &= i \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]] - \begin{cases} \frac{2m}{\omega} \ln 4\gamma + \mathcal{O}(\gamma^{-1}) & (\gamma \gg 1) \\ \frac{\pi}{2} \frac{m^2}{eE_0} + \mathcal{O}(\gamma^3) & (\gamma \ll 1) \end{cases}. \end{aligned} \quad (136)$$

ここで, $\text{K}(k) := \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$, $\text{E}(k) := \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}$ は第 1 種, 第 2 種完全楕円積分であり, また, 今考えているポテンシャルに対して

$$\text{Re} z_{\text{tp},n} = t_{\text{cr},n} = \frac{\pi}{\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (137)$$

が成り立つことを使った (証明は略). よって,

$$\left. \frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} \right|_{\mathbf{p}=0} = \begin{cases} \left| \sum_n (\text{phase}) \times e^{-\frac{2m}{\hbar\omega} \ln 2\gamma} \right|^2 & (\gamma \gg 1) \\ \left| \sum_n (\text{phase}) \times e^{-\frac{\pi}{2} \frac{m^2}{\hbar e E_0} / \hbar} \right|^2 & (\gamma \ll 1) \end{cases} + \mathcal{O}(e^{-3 \text{Re} \sigma[z_{\text{tp}}^*] / \hbar})$$

$$\propto \begin{cases} \left(2 \frac{m\omega}{eE_0}\right)^{2\frac{2m}{\hbar\omega}} & (\gamma \gg 1) \\ e^{-\pi \frac{m^2}{\hbar e E_0}} & (\gamma \ll 1) \end{cases} \quad (138)$$

となる. 2行目で位相因子はあまり効かないだろうと思い込むことにして無視した. よって, 半古典近似によれば, 粒子生成の様子は Keldysh パラメータ γ という 1つのパラメータで完全に決定され, その大小で非摂動・摂動的な粒子生成の描像が移り変わる⁵²(もう少し詳しい物理的な解釈は 2 節や, あるいは問題点は脚注 10 や図 6 を参照).

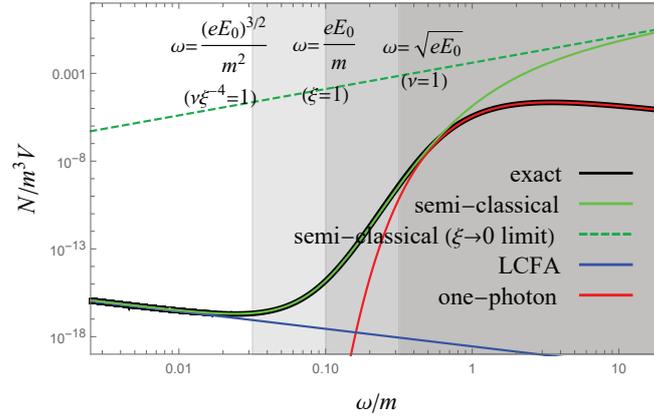


図 6: Sauter 電場 $E(t) = E_0/\cosh^2(\omega t)$ に対する粒子生成の周波数依存性. 半古典近似は $\gamma = \xi^{-1} = m\omega/eE$ が小さい領域でとても良い近似を与える一方, 大きい領域で全然合わない. 半古典近似には入ってこない $\nu = \omega^2/eE$ というパラメータの大小も大事になってくる.

4.2.3 量子干渉

4.2.2 節では確率振幅の位相の干渉効果を完全に無視したが, これは実はあまりよくない. 位相の干渉効果は粒子生成が何回も起こるときに有意な違いをもたらす. これを前節 4.2.2 で使った振動電場の場合に見てみる. 式 (136) より, 指数関数の肩の実部 $\text{Re } \sigma[z_{\text{tp},n}]$ は n に依存しない. 物理的には単なる振動電場を考えているから電場の最大値は一定なので, 粒子生成の絶対量は各イベントで同じ, と

⁵²ちなみに, Sauter 電場 $E = E_0/\cosh^2 \omega t$ の場合は,

$$\text{Re} [-\sigma[z_{\text{tp}}^*]] = -\frac{\pi}{2} \frac{m^2}{eE_0} \frac{2}{\gamma} \left(\sqrt{1+\gamma^{-2}} - \gamma^{-1} \right) = -\pi \frac{m^2}{eE_0} \times \begin{cases} 2\gamma^{-1} + 2\gamma^{-2} + \mathcal{O}(\gamma^{-3}) & (\gamma \gg 1) \\ 1 - \frac{\gamma^2}{4} + \mathcal{O}(\gamma^4) & (\gamma \ll 1) \end{cases} \quad (139)$$

となって, $\gamma \gg 1$ のときに周期電場のような単純な摂動的冪依存性は持たない. Sauter 電場の Fourier スペクトルは単色の周期電場と違って幅を持っているので必ずしも摂動的な冪依存性は持たなくても良いのだ, などと言う人がいるけど, そもそも $\gamma \rightarrow \infty$ では半古典近似は危ないので (脚注 10 参照), 摂動的になって然るべしという物理を正しく記述できない, という解釈の方が個人的には正しいと思う.

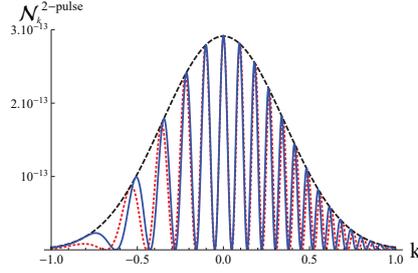


図 7: パルス電場を 2 回当てた時に量子干渉効果によって縦運動量のスペクトルが変更を受ける様子 (図は Akkermans-Dunne [189] より). 厳密な数値計算 (青線) を半古典近似 (赤線) と 1 パルスの粒子数に (パルス数)² = 4 かけたもの (黒線) を比較.

いうこと. 実部をくくりだせば,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} &= \left| \sum_n e^{\text{Re}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]/\hbar + i \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar]} \right|^2 + \mathcal{O}(e^{-3 \text{Re} \sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}) \\
&= \left| \sum_n e^{i \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]/\hbar]} e^{2 \text{Re}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} + \mathcal{O}(e^{-3 \text{Re} \sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}) \right|^2 \\
&= \sum_{n,n'} (2 - \delta_{n,n'}) \cos \left(\frac{\text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]] - \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n'}^*]]}{\hbar} \right) e^{2 \text{Re}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} + \mathcal{O}(e^{-3 \text{Re} \sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar})
\end{aligned} \tag{140}$$

となる. ここで大事なことは, \cos の引数をうまく調節すると, 干渉が効率化して粒子生成が大きく増大/抑制される, ということである. より一般の実部 $\text{Re} \sigma[z_{\text{tp},n}]$ が n に依存する場合は, 必ずしも \cos のような簡単な因子を抜き出すことはできないが, 基本的なアイデアは同じで量子干渉は粒子生成イベントが複数あると必ず起こる.

例として, 増大する場合を見てみる. 増大は \cos の引数が $2\pi\mathbb{Z}$ のときに起こる. つまり,

$$\frac{\text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]] - \text{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n'}^*]]}{\hbar} \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{141}$$

このとき, $\cos(\dots) = 1$ となるから, 粒子生成が起こるごとに粒子生成は Bose enhancement を受けて,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} &= \sum_{n,n'} (2 - \delta_{n,n'}) e^{2 \text{Re}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} + \mathcal{O}(e^{-3 \text{Re} \sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}) \\
&= \underbrace{2n_{\text{max}}^2 - n_{\text{max}}}_{\sim 2n_{\text{max}}^2} \times e^{2 \text{Re}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar} + \mathcal{O}(e^{-3 \text{Re} \sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar})
\end{aligned} \tag{142}$$

という風に粒子生成が起きた回数 n_{max} の二乗で粒子数は増える. 量子干渉は振動数 ω や電場の強さ eE_0 (あるいは, 今は $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ に限定しているが, 運動量 \mathbf{p}) を変えることで調整できる. 今の場合, 式

(136) で評価をサボっていた虚部を頑張って評価すると,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]] &= -2\frac{eE_0}{\omega} \int^{t_{\text{cr}},n} dz \sqrt{\gamma^2 + \cos^2 \omega z} \\ &= -2\frac{eE_0}{\omega} \times \frac{(2n+1)\pi}{\omega} \sqrt{1+\gamma^2} E \left(\frac{1}{1+\gamma^2} \right)\end{aligned}\quad (143)$$

となるので,

$$\frac{\operatorname{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n}^*]] - \operatorname{Im}[-\sigma[z_{\text{tp},n'}^*]]}{\hbar} = -(n-n') \times 4\pi \frac{eE_0}{\hbar\omega^2} \sqrt{1+\gamma^2} E \left(\frac{1}{1+\gamma^2} \right) \quad (144)$$

だから,

$$2\frac{eE_0}{\hbar\omega^2} \sqrt{1+\gamma^2} E \left(\frac{1}{1+\gamma^2} \right) \in \mathbb{Z} \quad (145)$$

ならば粒子生成は干渉によって増大を受ける. 逆に, 左辺が半整数になるときは粒子生成は抑制されて,

$$\left. \frac{d^3 N}{d\mathbf{p}^3} \right|_{\mathbf{p}=0} \sim (1 - (-1)^{n_{\text{max}}}) \times e^{2\operatorname{Re}[-\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar]} + \mathcal{O}(e^{-3\operatorname{Re}\sigma[z_{\text{tp}}^*]/\hbar}) \quad (146)$$

のようになる.

5 実時間発展とバックリアクション

(5 節で言いたいこと)

- 実時間発展を議論するために断熱粒子描像が広く用いられている. しかし, これはあくまで人間が勝手に定めた1つの粒子の定義であって, “真の粒子” に一致する保証はどこにもない.
- 電磁場へのバックリアクションは平均場近似の範囲内で定式化されている.
- 2点関数の UV 発散は断熱正則化とくりこみによって処理することができる.
- バックリアクションによって電場は減衰振動することが数値計算で確かめられる. 解析的な計算によってこれを再現するのはなかなか難しい.

これまでの議論はいくつかの点で不満がある: (1) 粒子生成は実時間のダイナミクスのはずなのに無限の未来での粒子数しか議論できていない; (2) 電磁場を固定する取り扱いがエネルギー保存則を破るので非物理的である. これらの不満点に関する理論的なアプローチについて議論する.

5.1 断熱粒子描像

3.2 節で説明したように, 外場があるときには“粒子”を曖昧さなく定義することは不可能である. なので, 3.2 節では無限の過去と未来で外場を切ることでこの問題を回避した. ここでは, “もっとも

らしいモード関数”を手で定めることで、それらしく有限の時間 t の“粒子”を定義する、という方法の1つとして断熱粒子描像 (adiabtic particle picture) を議論する。少々注意するが、これはあくまでノリの取り扱いで、勝手に定義した“粒子”はあくまで“あなたの粒子”であって、それが“真の粒子”に対応している理論的な保証はどこにもないし、実験的に測れるのはすべての相互作用から解放されたフリーな粒子のみなので実験的に確かめるすべも存在しない。しかし、便利な物理的な見方を与えるのは確かだし、グダグダ言っても物理的な理解が進まないので、広く用いられている。

断熱粒子描像のアイデアは、今までは場の演算子 ϕ を平面波で展開していたが、平面波の代わりにWKB解で各時刻各時刻で展開することで有限時間の生成消滅演算子を定義する⁵³:

$$\begin{pmatrix} \phi(t, \mathbf{x}) \\ \dot{\phi}(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \\ +i\Omega^{(n)}\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \end{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) + \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) \\ -i\Omega^{(n)}\phi_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) \end{pmatrix} b_{-\mathbf{p}}^{(n)\dagger}(t) \right]. \quad (147)$$

ここで、 $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ は n 次で打ち止めした (普通の)WKB 解で、4.1.1 節で計算した Ω_n を使って、

$$\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) := \frac{e^{-i\int^t dt' \Omega^{(n)}(t')}}{\sqrt{2\Omega^{(n)}(t)}} \quad \text{with } \Omega^{(n)} := \sum_{n'=1}^n \Omega_{n'} \quad (148)$$

と定義される。WKB 解はモード方程式 (16) の厳密な解ではないから生成消滅演算子 $a_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}}^{(n)}$ は時間依存することに注意。WKB 解 $\phi^{(n)}$ は厳密なモード関数 $\phi_{\mathbf{p}}$ と同じ規格化条件 (18) を満たすので、生成消滅演算子 $a_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}}^{(n)}$ は、

$$\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = [a_{\mathbf{p}}^{(n)}, a_{\mathbf{p}'}^{(n)\dagger}] = [b_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}'}^{(n)\dagger}], \quad 0 = [a_{\mathbf{p}}^{(n)}, a_{\mathbf{p}'}^{(n)}] = [b_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}'}^{(n)}] \quad (149)$$

の交換関係を満たす。このことから $a_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}}^{(n)}$ はたしかに (ある時刻 t に)1 粒子を作ったり消したりする生成消滅演算子になっていることが分かり、対応する真空状態や多粒子状態も普通の場の理論と同じように構成することができる。例えばある時刻 t の真空は、

$$0 = a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) |0^{(n)}; t\rangle = b_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) |0^{(n)}; t\rangle \quad \text{for any } \mathbf{p} \quad \text{with } 1 = \langle 0^{(n)}; t | 0^{(n)}; t \rangle \quad (150)$$

と定義できる。

WKB 解 $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ で粒子描像を定める気持ちは、雑に言えば平面波を時間依存に拡張したものが WKB 解だから。もう少しそれっぽく言えば、電場が十分遅いときには、WKB 解 $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ が時間並進演算子 $+i\partial_t$ の近似的な固有関数みたいなものになっている。つまり、

$$+i\partial_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \sim \Omega^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \quad (151)$$

⁵³ ϕ は 2 階微分方程式を満たすので、 ϕ と $\dot{\phi}$ は独立自由度。したがって、原理的には ϕ と $\dot{\phi}$ はそれぞれ別の好き勝手な関数で展開してよい [144]。例になっているかわからんが、例えば、 $f = e^{-i\omega t}$ は 2 階微分方程式に従うが、これは

$$f = \underbrace{\alpha \frac{e^{-i\omega t}}{t}}_{=f_1} \times \underbrace{t}_{=a} + (1 - \alpha) \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{t^2}}_{=f_2} \times \underbrace{t^2}_{=b}$$

と展開しても良いが、これは 1 階微分の展開を一意に定めてなくて、例えば、任意の β を使って $f = \underbrace{\beta(-i\omega) \frac{e^{-i\omega t}}{t}}_{=f_1'} \times \underbrace{t}_{=a} + (1 - \beta)(-i\omega) \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{t^2}}_{=f_2'} \times \underbrace{t^2}_{=b}$ と展開してもまったく問題ない。ここで、 $\dot{\phi}$ を $\dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{(n)}$

ではなく、 $-i\Omega^{(n)}\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ で展開したのは先行文献 [59, 60, 61, 62] に従ったわけだが、気持ちとしては (1) こっちの方がより固有値方程式 (151) 感が出る; (2) 断熱正則化と相性が良い ($\dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{(n)}$ を使うと 0 次の断熱正則化でエネルギーが保存しなくなったりする), という感じだと思う。フェルミオンの場合は 1 階微分方程式に従うので、こういうめんどくさい 1 階微分の条件を考える必要はない。

だから、各時刻各時刻の瞬間的な1粒子エネルギーを $\Omega^{(n)}$ と解釈することができ、そのエネルギーを作るような励起を粒子と同定するのは自然に思えるからである。電場が遅いときには式 (151) は精度がよくなるだろう。つまり、断熱的な状況だと良さそうな取り扱いになっていると思われるので、そのことから断熱粒子描像と呼ばれる。ちなみに、Wigner 関数や Green 関数の表式をがちゃがちゃいじって有限時間の粒子描像を定めることもできるが、これは (最低次の) 断熱粒子描像と完全に等価である (例えば、DHW formalism の文脈だと Hebenstreit-Alkofer-Gies [69]).

断熱粒子描像は無限の過去と未来における粒子描像を自然に含む。無限の過去と未来で電場が切れると思えば、WKB 解 $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ は無限の過去と未来で普通の平面波に漸近するから、WKB 解による展開 (147) は普通の平面波による展開に一致する。よって、

$$a_{\mathbf{p}}^{(n)}(\pm\infty) = a_{\mathbf{p}}^{\text{as}}, \quad b_{\mathbf{p}}^{(n)}(\pm\infty) = b_{\mathbf{p}}^{\text{as}} \quad (152)$$

である。一方で、有限の時刻においては $a_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}}^{(n)}$ は $a_{\mathbf{p}}^{\text{as}}, b_{\mathbf{p}}^{\text{as}}$ と一致しない。この不一致具合は、(時間に依存した) Bogoliubov 変換を用いて定式化できる。式 (40) より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \end{pmatrix} &= +i \int d^3\mathbf{x} \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right)^* \\ - \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \right)^* \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi \\ &= \begin{pmatrix} \left(+i\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \right) a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) + \left(+i\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \right) b_{-\mathbf{p}}^{(n)}(t) \\ \left(-i\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \right) a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) + \left(-i\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \right) b_{-\mathbf{p}}^{(n)}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(+i\phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right)^* & - \left(-i\phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right)^* \\ - \left(-i\phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right) & +i\phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \\ b_{-\mathbf{p}}^{(n)}(t) \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) & -\beta_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) \\ -\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) & \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \\ b_{-\mathbf{p}}^{(n)}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (153)$$

記法を簡単にするため $-i\Omega^{(n)}\phi_{\mathbf{p}}^{(n)} =: \dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{(n)}$ と書いた。つまり、 $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} = \left(-i\Omega^{(n)}\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} - \dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \right) \phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ などと理解することにした。また、 $\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)}, \beta_{\mathbf{p}}^{(n)}$ の複素共役がどうだこうだとかは漸近状態に対する Bogoliubov 変換 (46) と一貫的になるように選んだ。

有限の時間 t での生成粒子数 N (あるいは興味があれば真空崩壊率 w) は、漸近状態に対する議論 (3.2 節) とまったく同じように計算できる。無限の過去における真空 $|0; \text{in}\rangle$ (47) について粒子数演算子の期待を取れば、

$$\frac{d^3}{d\mathbf{p}^3} \begin{pmatrix} N^{(n)}(t) \\ \bar{N}^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \langle 0; \text{in} | \begin{pmatrix} a_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger}(t) a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \\ b_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger}(t) b_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \end{pmatrix} | 0; \text{in} \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} |\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}(t)|^2 \\ |\beta_{-\mathbf{p}}^{(n)}(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (154)$$

を得る。したがって、 $N^{(n)}(t)$ は Bogoliubov 係数 $\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}$ によって決定されるが、 $\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}$ は $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ と $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ で決定されて、 $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ はわれわれが勝手に設定した WKB 解で既知だから、 $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ が求まれば $N^{(n)}(t)$ が求まる。つまり、モード方程式 (36) を解けば計算できる。逆に、モード方程式 (36) を解くことで得られる $N^{(n)}(t)$ 自体な“厳密”な量で、もともとの親玉であるモード方程式 (36) に何か近似を施して結果得られた量ではない。つまり、 $N^{(n)}(t)$ を「有限時刻 t における粒子数」と「解釈する」ことはある種の近似であるが、 $N^{(n)}(t)$ 自体はモード方程式 (36) と同等の情報を含んでいることを一応注意しておく。

生成粒子数 $N^{(n)}(t)$ はモード方程式 (36) を解いて計算するのが一番楽だが、しばしば $N^{(n)}$ に関する微分方程式として表すことがある (quantum Vlasov equation などと呼ばれて、普通は $n = 0$ とする)。このように表示すると、Boltzman 方程式 (みたいなもの) に入るソース項を同定できるので、運動学的な記述で Schwinger 機構の実時間発展を議論したいときに便利なおことがある。 $N^{(n)}(t)$ を微分すると、

$$\frac{df_{\mathbf{p}}}{dt} = 2 \operatorname{Re} \left[\beta_{\mathbf{p}}^{(n)*} \dot{\beta}_{\mathbf{p}}^{(n)} \right] =: S \quad \text{where} \quad f_{\mathbf{p}} := \frac{(2\pi)^3}{V} \frac{d^3 N^{(n)}}{d\mathbf{p}^3} \quad (155)$$

となる ($f_{\mathbf{p}}$ は位相空間密度)。右辺の $\dot{\beta}_{\mathbf{p}}^{(n)}$ を評価するために、Bogoliubov 変換 (153) から

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \int d^3 \mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}(t) a_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*}(t) b_{-\mathbf{p}}^{\text{in}\dagger} \right] \\ &= \int d^3 \mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}(t) \left(\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) - \beta_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) b_{-\mathbf{p}}^{(n)}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*}(t) \left(-\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) + \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) b_{-\mathbf{p}}^{(n)}(t) \right) \right] \\ &= \int d^3 \mathbf{p} \frac{e^{+i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left[(\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}(t) - \beta_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*}(t)) a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \right. \\ &\quad \left. + (-\beta_{\mathbf{p}}^{(n)*}(t) \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}(t) + \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*}(t)) b_{-\mathbf{p}}^{(n)\dagger}(t) \right] \end{aligned} \quad (156)$$

となるが、これを断熱粒子描像のモード展開 (147) と見比べて、

$$\begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \\ \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)*} & -\beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \\ -\beta_{\mathbf{p}}^{(n)*} & \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \\ \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} & \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \\ \beta_{\mathbf{p}}^{(n)*} & \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \\ \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \end{pmatrix} \quad (157)$$

となることを覚えておく (最右辺に至るために規格化条件から従う $1 = |\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)}|^2 - |\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}|^2$ を使った)。同じ式は $\dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{(n)}$ と $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ に対しても成り立つ。さて、 $\beta_{\mathbf{p}}^{(n)} = -i\phi_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ であることを使えば、

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{\mathbf{p}}^{(n)} &= \partial_t \left[-i\phi_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right] \\ &= -i\partial_t \left[\phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + i\Omega^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right] \\ &= -i \left[\phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \ddot{\phi}_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + (\partial_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)}) \dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + i\dot{\Omega}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + i\Omega^{(n)} (\partial_t \phi_{\mathbf{p}}^{(n)}) \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + i\Omega^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right] \\ &= -i \left[-\omega_{\mathbf{p}}^2 \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + \left(-i\Omega^{(n)} - \frac{\dot{\Omega}^{(n)}}{2\Omega^{(n)}} \right) \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + i\dot{\Omega}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right. \\ &\quad \left. + i\Omega^{(n)} \left(-i\Omega^{(n)} - \frac{\dot{\Omega}^{(n)}}{2\Omega^{(n)}} \right) \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} + i\Omega^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \dot{\phi}_{\mathbf{p}}^{\text{in}} \right] \\ &= -i \left[\left(-\omega_{\mathbf{p}}^2 + \Omega^{(n)2} + \frac{i}{2} \dot{\Omega}^{(n)} \right) \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} (\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} + \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\dot{\Omega}^{(n)}}{2\Omega^{(n)}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} (\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} (-i\Omega^{(n)}) \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} + \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} (+i\Omega^{(n)}) \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*}) \right] \\ &= -i \left[\left(-\omega_{\mathbf{p}}^2 + \Omega^{(n)2} + i\dot{\Omega}^{(n)} \right) \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)2} + (-\omega_{\mathbf{p}}^2 + \Omega^{(n)2}) \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \right] \\ &= \frac{i \left(\omega_{\mathbf{p}}^2 - \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)2} \right) + \dot{\Omega}_{\mathbf{p}}^{(n)}}{2\Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}} \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} e^{-2i \int^t dt' \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}(t')} + \frac{i \left(\omega_{\mathbf{p}}^2 - \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)2} \right)}{2\Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}} \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \end{aligned} \quad (158)$$

を得る⁵⁴. これを式 (155) に戻すと, ソース項 S は,

$$S = 2 \operatorname{Re} \left[\beta_{\mathbf{p}}^{(n)*} \left\{ \frac{i(\omega_{\mathbf{p}}^2 - \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)2}) + \dot{\Omega}_{\mathbf{p}}^{(n)}}{2\Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}} \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} e^{-2i \int^t dt' \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}(t')} + \frac{i(\omega_{\mathbf{p}}^2 - \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)2})}{2\Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}} \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \right\} \right] \quad (159)$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{i(\omega_{\mathbf{p}}^2 - \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)2}) + \dot{\Omega}_{\mathbf{p}}^{(n)}}{\Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}} \alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \beta_{\mathbf{p}}^{(n)*} e^{-2i \int^t dt' \Omega_{\mathbf{p}}^{(n)}(t')} \right] \quad (160)$$

のように Bogoliubov 係数 $\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)}, \beta_{\mathbf{p}}^{(n)}$ を使って表すことができる. 特に, $n = 0$ の場合は,

$$S|_{n=0} = \frac{e\mathbf{E}}{\omega_{\mathbf{p}}} \cdot \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}} \operatorname{Re} \left[\alpha_{\mathbf{p}}^{(0)} \beta_{\mathbf{p}}^{(0)*} e^{-2i \int^t dt' \omega_{\mathbf{p}}(t')} \right] \quad (161)$$

となる. この表示は断熱正則化におけるカレントの表式の物理的意味を考えると便利になることがある.

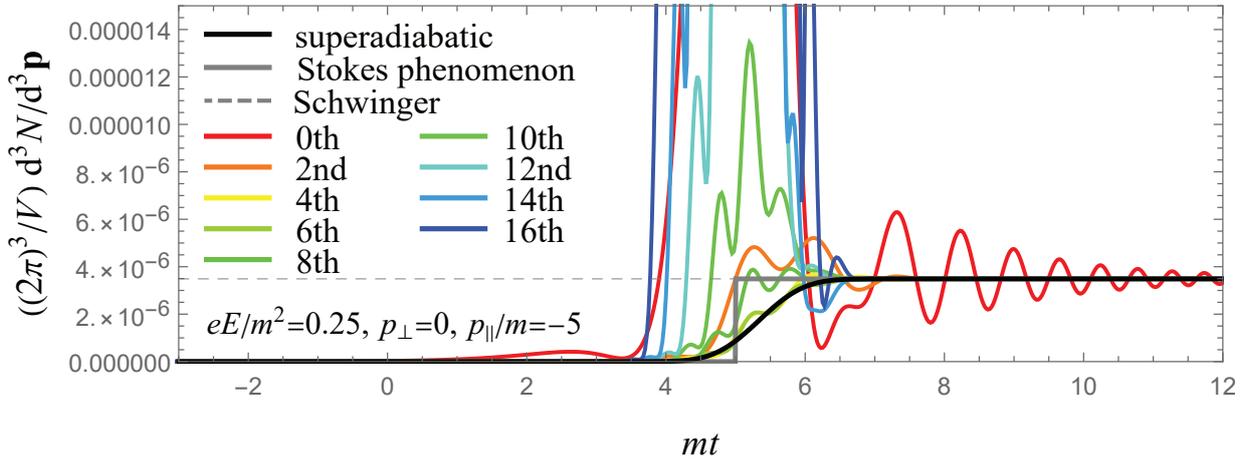


図 8: 定常電場 $E(t) = E$ に対する断熱粒子描像に基づく粒子生成数 $N^{(n)}(t)$ の時間発展.

生成粒子数 $N^{(n)}(t)$ は WKB 展開のオーダー n に非常に敏感である (図 8 参照). つまり, とても素朴に考えると n を大きくするほど近似は“精密”になってゆくのだろうからいずれはある一定の値に収束して“真の粒子数”を与えるのでは, と思うかもしれないが, これは誤りである. むしろオーダーを上げてくと最終的に激しく振動しさらに発散する. これは断熱粒子描像はあくまでノリであって, “真の粒子”を表しているわけではないことの間接的な表れと解釈することもできる. ちなみに, 運動量積分を実行すると $N^{(n)}(t)$ が発散することもある [190]. そういう意味でも断熱粒子描像は危ない面がある. こうした気持ちの悪い振舞いがないような“気持ちのよい粒子描像”として最近, “超断熱粒子描像”というものも議論されている [143, 144]. これは, 完全 WKB のときにやったように級数 $\phi_{\pm}^{(n)}$ の Borel 和を厳密に実行するのではなく, $\phi_{\pm}^{(n)}$ の階乗発散のリーディングだけで近似した $\phi_{\pm}^{(n)} \sim n!$ を使って近似的に Borel 和を実行し, さらにその後 Laplace 変換を実行するとき最急降下法を使う, と

⁵⁴DDP 法は式 (158) を基にして得られる: $\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \sim 1$ と近似すると, $\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}$ についての 1 階微分方程式に落ちるので, $\beta_{\mathbf{p}}^{(n)} = \int dt (\dots)$ の解を得る. 右辺の積分を最急降下法を使って半古典的に解くのが DDP 法で, 半古典公式 (127) を最終的に得る. ここで, $n = 0$ と取るのが慣習的だが, ひょっとすると違う n を使ったり, そもそも WKB 解じゃなくて違う都合の良い関数による展開を考えると DDP 法を改善できるかもしれないなあ, と考えたこともあるがうまくいかなかった.

いう2つの近似を行って得られた Borel 和をモード関数に設定する, という方法である. 宇宙論の文脈だと, 文献 [97, 191] が超断熱粒子描像を cosmological particle production とかに応用している.

5.2 平均場近似によるバックリアクションの取り扱い

粒子生成による電磁場へのバックリアクションを考えたい. これは系のエネルギー保存を満たすために必須である. 電磁場へのバックリアクションを考えるために, ラグランジアン (13) に Maxwell 項を足す:

$$\mathcal{L} = |(\partial_\mu + ieA_\mu)\hat{\phi}|^2 - m^2|\hat{\phi}|^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (162)$$

電磁場 A_μ の運動方程式は,

$$0 = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \Rightarrow \partial_\nu F^{\nu\mu} = \underbrace{+ie [\phi^\dagger(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi - ((\partial_\mu + ieA_\mu)\phi)^\dagger\phi]}_{=: ej_\mu}, \quad (163)$$

となる. が, この式は左辺が古典的な量なのに対し, 右辺のカレント j はオペレータの式になっているのでちょっとおかしい. これは A_μ を古典場として扱ってしまっていることの弊害である. A_μ の古典近似とコンシステントになるように, 右辺のカレント j^μ を平均場近似することで古典量に落とす:

$$j^\mu \rightarrow \langle 0; \text{in} | : j^\mu : | 0; \text{in} \rangle. \quad (164)$$

ここで, 状態は原理的にはなんでも良いのだが, 真空 $|0; \text{in}\rangle$ に興味があることにした. また, j^μ の期待値を素朴に計算すると UV 発散しているので $\langle 0; \text{in} | j^\mu | 0; \text{in} \rangle = \infty$, この UV 発散をなんらかの方法で正則化し well-defined にしたという意味で: \bullet : を足した.

こうして平均場近似した式 (163) と ϕ が従う Klein-Gordon 方程式 (34) を連立させた式,

$$\begin{cases} 0 = [(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 + m^2]\phi \\ \partial_\nu F^{\nu\mu} = e \langle 0; \text{in} | : j^\mu : | 0; \text{in} \rangle \end{cases} \quad (165)$$

を解くのがバックリアクション問題の平均場近似に基づいたアプローチである. 空間一様のときは, 式 (165) の2式目は簡単化できて,

$$\partial_t \mathbf{E} = -e \langle 0; \text{in} | : \mathbf{j} : | 0; \text{in} \rangle \quad (166)$$

である. カレントを流すためには, 真空から粒子を作ってさらに電子を加速する必要があるわけで, この両ステップで電場はエネルギーを消費する. よって, 流れているカレントが大きくなれば大きくなるほど電場は強いバックリアクションを受ける.

5.3 UV 発散の処理

5.3.1 断熱正則化

期待値の正則化: \bullet : の1つの方法が断熱正則化 (adiabatic regularization) である. とても端的に言えば, 各時刻各時刻で正規順序を取ることを UV 発散を除去する方法である [59, 60, 61, 62] (もとも

とは曲がった時空の量子論の文脈で開発された [55, 65]). これは真空を (低次の) 断熱粒子描像で定め、その真空の寄与を差っ引いていることに他ならない. この方法のメリットは物理が分かりやすいのと数値計算に載せやすいことだと思う. デメリットとしては空間が非一様な場合への拡張がよくわからないことなんかがあると思う. 他の正則化の方法として point-splitting を利用する方法とかいろいろあるらしいが [55, 65], 田屋は知らないのここではやらない.

断熱粒子描像を議論するために、まず 2 点関数の UV 発散は WKB 展開の低次項に由来することを見る. 一般の 2 点関数の真空期待値 $\langle 0; \text{in} | \phi^\dagger \hat{O} \phi | 0; \text{in} \rangle$ は、 ϕ_p^{in} を使ったモード展開 (39) を使ってやると、

$$\langle 0; \text{in} | \phi^\dagger \hat{O} \phi | 0; \text{in} \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi_p^{\text{in}} O_p \phi_p^{\text{in}*} \quad (167)$$

と書ける. UV 発散の構造を見るためには $\phi_p^{\text{in}} O_p \phi_p^{\text{in}*}$ がどのような運動量依存性を持っているかを調べれば良い. これを調べるために 4.1.1 節で説明した WKB 展開を使う. モード関数 ϕ_p^{in} を WKB 展開すると、

$$\phi_p^{\text{in}}(t) \approx \frac{e^{-i \int^t dt' \Omega(t')}}{\sqrt{2\Omega(t)}} \quad (168)$$

と書ける. ここで、“ \approx ” を使っている気持ちは、本当は Stokes 現象が起きているので正負の振動モードが混じって $\phi_p^{\text{in}}(t) = \alpha_p \frac{e^{-i \int^t dt' \Omega(t')}}{\sqrt{2\Omega(t)}} + \beta_p \frac{e^{+i \int^t dt' \Omega(t')}}{\sqrt{2\Omega(t)}}$ のようになるはずだが、Bogoliubov 係数は高運動量領域で十分早く自明になること $\alpha_p \rightarrow 1, \beta_p \rightarrow 0$ を要請し、UV 発散には効かないと「仮定」し無視した $\alpha_p \approx 1, \beta_p \approx 0$. 外場のスケールよりもはるかに大きいような高運動量領域では系は自由場に漸近するはずなので自然な仮定であると思われる一方、この取り扱いをちゃんと正当化できるかどうかについては田屋は良く知らない (し、これまでの研究だと注意深く議論されていないと思う) が、とにかくこれを仮定することにする⁵⁵⁵⁶. WKB の周波数 Ω は \hbar 展開 $\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Omega_n$ で逐次的に決定することができるのは 4.1.1 節で述べた通りで結果は式 (81) で与えられる. 今は $Q(t) = \omega_p^2(t)$ の場合に相当するので、式 (81) は

$$\Omega_0 = \omega_p, \quad (169a)$$

$$\Omega_1 = 0, \quad (169b)$$

$$\Omega_2 = \frac{3\dot{\omega}_p^2 - 2\omega_p \ddot{\omega}_p}{8\omega_p^3} \quad (169c)$$

⁵⁵例えば、外場の Fourier スペクトルを見た時に高周波成分が $\omega \rightarrow \infty$ で早く落ちないときは Bogoliubov 係数は高運動量領域で必ずしも早く落ちるわけではないと思う. 電場が十分に遅い (電場の Fourier スペクトルが高周波成分を持たない) ときには、 β は一様定常電場の結果 (71) と大差ないだろう. この場合は確かに高運動量成分はガウシアンで抑制されているので、たしかに $\beta_p \approx 0$.

⁵⁶曲がった時空の文脈の議論だと [55, 65], モード関数 $\phi_p^{\text{in}}(t)$ を $\phi_p^{\text{in}}(t) = \alpha_p^{(n)} \frac{e^{-i \int^t dt' \Omega^{(n)}(t')}}{\sqrt{2\Omega^{(n)}(t')}} + \beta_p^{(n)} \frac{e^{+i \int^t dt' \Omega^{(n)}(t')}}{\sqrt{2\Omega^{(n)}(t')}}$ のように n 次の WKB 解で展開したときには、WKB 解の部分は \hbar の n 次まではモード方程式 (36) の解になっているので、真の解からのズレを記述するはずである Bogoliubov 係数は $\beta_p^{(n)} = \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ にならないといけないだろう. よって、 \hbar 展開は運動量の逆冪の展開 $\hbar = \mathcal{O}(\omega_p^{-1})$ に大体なっているので、Bogoliubov 係数 $\beta_p^{(n)}$ は高次の運動量依存性しか持たず UV 発散には効かないだろう. そういう論理を展開していると理解しているのだが、実際のところは、WKB 展開は漸近展開であるために、 $\beta_p^{(n)}$ の \hbar のオーダーは $e^{-\#/\hbar}$ となっているわけで、 $\beta_p^{(n)} = \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ とはみなせない. よって論理が通っていないと思う. 素朴に $\hbar = \mathcal{O}(\omega_p^{-1})$ だと信じれば、 $e^{-\#/\hbar}$ の $\#$ は $\# = \mathcal{O}(\omega_p)$ になって指数関数的に高運動量成分は抑制される気がしないわけでもないが、一般に電場が周波数を持っているときは $\#$ はログの依存性とかを持ったりできる (4.2.2 参照) ので、必ず高運動量成分が抑制されているかどうかというのは必ずしも自明でないと思う.

$$\Omega_3 = 0, \quad (169d)$$

$$\Omega_4 = \frac{-297\omega_{\mathbf{p}}^4 + 396\omega_{\mathbf{p}}\dot{\omega}_{\mathbf{p}}^2\ddot{\omega}_{\mathbf{p}} - 52\omega_{\mathbf{p}}^2\ddot{\omega}_{\mathbf{p}}^2 - 80\omega_{\mathbf{p}}^2\dot{\omega}_{\mathbf{p}}\ddot{\omega}_{\mathbf{p}} + 8\omega_{\mathbf{p}}^3\ddot{\omega}_{\mathbf{p}}}{128\omega_{\mathbf{p}}^7}, \quad (169e)$$

$$\Omega_5 = 0, \quad (169f)$$

⋮

と読める. ここで重要なことは, モード方程式 (36) において \hbar と ∂_t はセットで出てくるので, Ω_n における \hbar の次数 n と微分 ∂_t の数が同じになっていることである. 今, 理論に入っている時間依存パラメータは $\omega_{\mathbf{p}}$ しかないわけだが, $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}$ を n 回微分すると $\partial_t^n \propto \omega_{\mathbf{p}}^{1-n} \propto |\mathbf{p}|^{1-n}$ という風に運動量 \mathbf{p} に関する冪の依存性が変わる. つまり, $\mathcal{O}(\hbar^n) = \mathcal{O}(|\mathbf{p}|^{1-n})$ とみなせる. よって, Ω の WKB 展開 (169) は, 運動量展開 $|\mathbf{p}|^{-n}$ をしていることと大体同じになっている. WKB 展開 (169) に出てくる時間微分を $\dot{\omega}_{\mathbf{p}} = \frac{e\mathbf{E} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}}$ などと言うように明示的に実行するともっとわかりやすくして,

$$\Omega_0 = \omega_{\mathbf{p}}, \quad (170a)$$

$$\Omega_1 = 0, \quad (170b)$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{4} \frac{e\dot{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}^3} + \frac{-2(eE)^2 + 5 \left(\frac{e\mathbf{E} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}} \right)^2}{8\omega_{\mathbf{p}}^3} + \mathcal{O}(\omega_{\mathbf{p}}^{-4}), \quad (170c)$$

$$\Omega_3 = 0, \quad (170d)$$

$$\Omega_4 = \mathcal{O}(\omega_{\mathbf{p}}^{-4}), \quad (170e)$$

$$\Omega_5 = 0, \quad (170f)$$

$$\vdots \quad (170g)$$

$$\Omega_{2n} = \mathcal{O}(\omega_{\mathbf{p}}^{-2n}), \quad (170h)$$

$$\Omega_{2n+1} = 0, \quad (170i)$$

$$\vdots \quad (170j)$$

となるから,

$$\Omega = \underbrace{\omega_{\mathbf{p}}}_{\Omega_0 \text{由来}} - \underbrace{\frac{1}{4} \frac{e\dot{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}^3} + \frac{-2(eE)^2 + 5 \left(\frac{e\mathbf{E} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}} \right)^2}{8\omega_{\mathbf{p}}^3}}_{\Omega_2 \text{由来}} + \underbrace{\mathcal{O}(\omega_{\mathbf{p}}^{-4})}_{\Omega_{n \geq 2} \text{が効く}} \quad (171)$$

と分かる. 式 (171) を 2 点関数 (167) に代入すれば,

$$\langle 0; \text{in} | \phi^\dagger \hat{O} \phi | 0; \text{in} \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} O_{\mathbf{p}} \left[\underbrace{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}}_{\Omega_0 \text{由来}} + \underbrace{\frac{1}{8} \frac{e\dot{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}^5} - \frac{-2(eE)^2 + 5 \left(\frac{e\mathbf{E} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}} \right)^2}{16\omega_{\mathbf{p}}^5}}_{\Omega_2 \text{由来}} + \underbrace{\mathcal{O}(\omega_{\mathbf{p}}^{-6})}_{\Omega_{n \geq 2} \text{が効く}} \right]. \quad (172)$$

もしも $O_{\mathbf{p}} = \mathcal{O}(\mathbf{p}^2)$ よりも \mathbf{p} の冪が弱ければ, 冪的な UV 発散を出しえるのは 1 項目の Ω_0 由来の寄与だけである. このように WKB 展開のオーダーの低いところからの寄与が UV 発散が出る.

断熱正則化とは、2点関数の発散はWKBの低次の寄与に由来するので2点関数からその分を差っ引け、というものである。つまり、(n 次の)断熱正則化は、

$$\langle 0; \text{in} | : \phi^\dagger \hat{O} \phi : | 0; \text{in} \rangle := \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}*} - \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*}] \quad (173)$$

と定義される。ここで、 $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ は(n 次の)WKB解。差っ引いた部分は断熱物理描像が定めた時刻 t での真空 $|0^{(n)}; t\rangle$ の寄与と等しい。実際、

$$\begin{aligned} & \langle 0^{(n)}; t | \phi^\dagger \hat{O} \phi | 0^{(n)}; t \rangle \\ &= \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}' \frac{e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \left[\phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)} \langle 0^{(n)}; t | a_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} a_{\mathbf{p}'}^{(n)} | 0^{(n)}; t \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)} \langle 0^{(n)}; t | b_{-\mathbf{p}}^{(n)} a_{\mathbf{p}'}^{(n)} | 0^{(n)}; t \rangle \right. \\ & \quad \left. + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)*} \langle 0^{(n)}; t | a_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} b_{-\mathbf{p}'}^{(n)\dagger} | 0^{(n)}; t \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)*} \langle 0^{(n)}; t | b_{-\mathbf{p}}^{(n)} b_{-\mathbf{p}'}^{(n)\dagger} | 0^{(n)}; t \rangle \right] \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \quad (174) \end{aligned}$$

である。また、定義(173)は断熱粒子描像の生成消滅演算子 $a_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}}^{(n)}$ に対して正規順序化をしたもの、とも理解できるので、普通の正規順序化の拡張になっている：

$$\begin{aligned} & \left(\langle 0; \text{in} | \phi^\dagger \hat{O} \phi | 0; \text{in} \rangle \text{を } a_{\mathbf{p}}^{(n)}, b_{\mathbf{p}}^{(n)} \text{ に対して正規順序化をしたもの} \right) \\ &= \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}' \frac{e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \left[\phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)} \langle 0; \text{in} | a_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} a_{\mathbf{p}'}^{(n)} | 0; \text{in} \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)} \langle 0; \text{in} | b_{-\mathbf{p}}^{(n)} a_{\mathbf{p}'}^{(n)} | 0; \text{in} \rangle \right. \\ & \quad \left. + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)*} \langle 0; \text{in} | a_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} b_{-\mathbf{p}'}^{(n)\dagger} | 0; \text{in} \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)*} \langle 0; \text{in} | b_{-\mathbf{p}}^{(n)\dagger} b_{-\mathbf{p}'}^{(n)} | 0; \text{in} \rangle \right] \\ &= \int d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}' \frac{e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \left[\phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)} \langle 0; \text{in} | a_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} a_{\mathbf{p}'}^{(n)} | 0; \text{in} \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)} \langle 0; \text{in} | b_{-\mathbf{p}}^{(n)} a_{\mathbf{p}'}^{(n)} | 0; \text{in} \rangle \right. \\ & \quad \left. + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)*} \langle 0; \text{in} | a_{\mathbf{p}}^{(n)\dagger} b_{-\mathbf{p}'}^{(n)\dagger} | 0; \text{in} \rangle + \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}'} \phi_{\mathbf{p}'}^{(n)*} \langle 0; \text{in} | b_{-\mathbf{p}}^{(n)} b_{-\mathbf{p}'}^{(n)\dagger} - [b_{-\mathbf{p}}^{(n)}, b_{-\mathbf{p}'}^{(n)\dagger}] | 0; \text{in} \rangle \right] \\ &= \langle 0; \text{in} | \phi^\dagger \hat{O} \phi | 0; \text{in} \rangle - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \\ &= \langle 0; \text{in} | : \phi^\dagger \hat{O} \phi : | 0; \text{in} \rangle . \quad (175) \end{aligned}$$

Schwinger 機構の研究では $n = 0$ の最低次の断熱正則化をすれば十分である⁵⁷。実際、バックリアクションで計算しなければいけない量はカレント期待値 $\langle 0; \text{in} | : j : | 0; \text{in} \rangle$ であるが、これは0次の断熱正則化で病的な冪的发散が確かに取り除かれていることが示せる。簡単のため、電場が x^3 方向に向いていると思うと、 \mathbf{x}_\perp のカレント期待値 $\langle 0; \text{in} | : \mathbf{j}_\perp : | 0; \text{in} \rangle$ は $\mathbf{p}_\perp \leftrightarrow -\mathbf{p}_\perp$ の対称性からゼロになっている。

⁵⁷曲がった時空とかの場合だと、必ずしも $n = 0$ では済まない(例えば Birrel-Davies の教科書などを参照 [55])。あるいは観測量によっても高次まで考える必要があるかもしれない。

ることがすぐに示せる. 非自明な成分は $\langle 0; \text{in} | : j_3 : | 0; \text{in} \rangle$ だけで, それは

$$\begin{aligned}
& \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle \\
&= \langle 0; \text{in} | : +i [\phi^\dagger (\partial^3 + ieA^3)\phi - ((\partial^3 + ieA^3)\phi)^\dagger \phi] : | 0; \text{in} \rangle \\
&= \langle 0; \text{in} | : 2\phi^\dagger (p_3 - eA^3)\phi : | 0; \text{in} \rangle \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 2(p_3 - eA^3) \left[\underbrace{\frac{1}{2\Omega}}_{=\text{裸の量}} - \underbrace{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}}_{=0\text{ 次 of 断熱正則化}} \right] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 2(p_3 - eA^3) \left[\underbrace{\left\{ \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{8} \frac{e\dot{\mathbf{E}} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}^5} - \frac{-2(eE)^2 + 5 \left(\frac{e\mathbf{E} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{\omega_{\mathbf{p}}} \right)^2}{16\omega_{\mathbf{p}}^5} + \mathcal{O}(\omega_{\mathbf{p}}^{-6}) \right\}}_{=\text{裸の量}} - \underbrace{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}}_{=0\text{ 次 of 断熱正則化}} \right] \\
&= \frac{e\dot{E}}{4} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{(p_3 - eA^3)^2}{\omega_{\mathbf{p}}^5} + (\text{finite}) \\
&= \frac{e\dot{E}}{24\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + (\text{finite}) \tag{176}
\end{aligned}$$

と評価できる. ここで, $\int d^3\mathbf{p} \frac{(p_3 - eA^3)^2}{\omega_{\mathbf{p}}^5} = \frac{4\pi}{3} \ln \Lambda + (\text{finite})$ (Λ は運動量カットオフで, μ はくりこみ点を決める適当なスケール因子) となることを使った. よって, たしかに $\propto \Lambda^2$ の病的な発散は取り除けている. ログ発散が残っているが, これは次に議論するようにくりこみで除去できる. (数値計算をするときには, 異様に大きい Λ を取ったりしない限りは, ログ発散はほとんど単なる定数みたいなものなので無視しても問題ない. そういう意味で実用上は以上の断熱正則化だけで十分.)

くりこみを議論する前に, 断熱正則化の表式 (173) と粒子生成との関係をもう少し整理しておく. 式 (157) を使って $\phi_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ を $\phi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ で書き直すと,

$$\begin{aligned}
& \langle 0; \text{in} | : \phi^\dagger \hat{O} \phi : | 0; \text{in} \rangle \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[(\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} + \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*}) O_{\mathbf{p}} (\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} + \beta_{\mathbf{p}}^{(n)} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*})^* - \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} \right] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[|\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}|^2 \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} + (|\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)}|^2 - 1) \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} + 2 \text{Re} \left[\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \beta_{\mathbf{p}}^{(n)*} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \right] \right] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{|\beta_{\mathbf{p}}^{(n)}|^2 \phi_{\mathbf{p}}^{(n)*} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)}}_{=d^3N/d\mathbf{p}^3 \times (1\text{ 粒子の寄与})} + \underbrace{|\beta_{-\mathbf{p}}^{(n)}|^2 \phi_{-\mathbf{p}}^{(n)} O_{-\mathbf{p}} \phi_{-\mathbf{p}}^{(n)*}}_{=d^3\bar{N}/d\mathbf{p}^3 \times (1\text{ 反粒子の寄与})} + \underbrace{2 \text{Re} \left[\alpha_{\mathbf{p}}^{(n)} \beta_{\mathbf{p}}^{(n)*} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} O_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^{(n)} \right]}_{=\text{Zitterbewegung}} \right] \tag{177}
\end{aligned}$$

となる. [Zitterbewegung](#) とは正/負エネルギーの粒子の量子干渉効果のことで, $(\phi_{\mathbf{p}}^{(n)})^2 \propto e^{-2i \int^t dt' \Omega_n}$ で激しく振動する. 場の理論でまじめに計算するとどうしてもこの寄与が出てしまう. Zitterbewegung は激しく振動するので運動量積分でなめされてしまうと素朴に考えることにすると, 支配的になるのは初めの2項のみで, これは粒子生成によって生成された粒子と反粒子の寄与を表す. しかしながら, この取り扱いは必ずしも良くない (例えば, 運動学的な記述だと何も考えずに (期待値) = (粒子数) \times (1粒子の寄与) であるはずだ, と頭ごなしに決めて Zitterbewegung をネグったりすることがあるが, これはあまり良くない). 数値計算してみるとたしかに Zitterbewegung は期待値 $\langle 0; \text{in} | : \phi^\dagger \hat{O} \phi : | 0; \text{in} \rangle$ に対して subdominant な寄与しか与えないが, これがあるかないとでは系の時間発展の様子が変わっ

てくる. Schwinger 機構の場合だと, Zitterbewegung を取り入れないと真空分極の物理が入らず電場が decay しなくなる⁵⁸. このことをもう少し具体的に見るために, 0 次の断熱正則化した後のカレント $\langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle$ を式 (177) のように書き直す. カレント $\langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle$ は $O_{\mathbf{p}} = 2(p_3 - eA^3)$ の場合に対応するので,

$$\begin{aligned}
& \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{|\beta_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \frac{p_3 - eA^3}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 + (p_3 - eA^3)^2}}}_{= d^3 N / d\mathbf{p}^3 \times (1 \text{ 粒子の速度})} + \underbrace{|\beta_{-\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \frac{-p_3 - eA^3}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 + (p_3 + eA^3)^2}}}_{= d^3 \bar{N} / d\mathbf{p}^3 \times (1 \text{ 反粒子の速度})} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{2 \frac{p_3 - eA}{\omega_{\mathbf{p}}} \text{Re} \left[\alpha_{\mathbf{p}}^{(0)} \beta_{\mathbf{p}}^{(0)*} e^{-2i \int^t dt' \omega_{\mathbf{p}}(t')} \right]}_{= \text{Zitterbewegung}} \right] \\
&= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{|\beta_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \frac{p_3 - eA^3}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 + (p_3 - eA^3)^2}}}_{= d^3 N / d\mathbf{p}^3 \times (1 \text{ 粒子の速度})} + \underbrace{|\beta_{-\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \frac{-p_3 - eA^3}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 + (p_3 + eA^3)^2}}}_{= d^3 \bar{N} / d\mathbf{p}^3 \times (1 \text{ 反粒子の速度})} + \underbrace{\frac{e 2\omega_{\mathbf{p}} S}{eE}}_{= \text{Zitterbewegung}} \right] \tag{178}
\end{aligned}$$

である. 最終行で式 (161) を使った. (今はボソンだから本当は使えないけど) Dirac の海の描像に立つと, 最終項の Zitterbewegung は真空偏極の寄与だとも理解できる. というのは, 電場中の QED のバンド構造は歪み, Dirac の海と正エネルギー帯の距離は $2\omega_{\mathbf{p}}/eE$ となっている. よって, 粒子生成が起きると, 正負の電荷が距離 $2\omega_{\mathbf{p}}/eE$ 引きはがされたダイポールがレート $S = \partial_t |\beta^{(0)}|^2$ で生成され, 系を偏極させる. 伝導電流をいくら流そうが電場は遮蔽されず, 偏極が起きて初めて電場は遮蔽され得る. つまり, Zitterbewegung の寄与を含めることがバックリアクションによる電場の decay を議論する上で大事だとなんとなくわかる. (この偏極の寄与が大事なことは Gatoff-Kerman-松井 [58] が指摘し, 現象論的に Boltzman 方程式の計算に取り込んだ.)

5.3.2 くりこみ

前節の正則化によって, 2 点関数のベキ発散は除去できたが, まだ依然としてログ発散が残る. 数値計算的な立場としては, 所詮ログの発散なので小さいから問題にならない, という考え方もアリだけど, 理論的には $\Lambda \rightarrow \infty$ で発散するのでやはり問題⁵⁹.

ログ発散はくりこみで除去できる. つまり, 裸の電荷 e と裸の電場 E は観測量ではないのでログ発散していてよく, くりこまれた量である $e_{\text{R}}, E_{\text{R}}$ こそが有限な観測量を返すと考える. くりこみ定数 $Z = Z(\mu)$ と物理的な電荷 $e_{\text{R}} = e_{\text{R}}(\mu)$ と電場 $E_{\text{R}} = E_{\text{R}}(\mu)$ を

$$E := Z^{1/2} E_{\text{R}}, \quad e := Z^{-1/2} e_{\text{R}} \tag{179}$$

⁵⁸ 違う例だと高次高調波発生というのが物性の分野であって, この Zitterbewegung が高次高調波発生の言葉でいう interband の寄与に相当するのだが, この寄与を入れないと高次高調波が発生しない [113, 114, 90].

⁵⁹ くりこみを真面目に考えている論文をあまり見たことがないので, 真面目に考えると何か論文のネタになるかも.

と導入する. ここで, e_R と E_R の前に出てくるくりこみ定数が同じ Z (正確にはゲージ場の波動関数のくりこみ定数 Z_3) で書いているのはゲージ不変性の帰結⁶⁰.

くりこみ定数 Z を決定するためにバックリアクションの式 (166) を少し書き直す:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -e \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle \\ \Leftrightarrow Z^{1/2} \dot{E}_R &= -Z^{-1/2} e_R \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle \\ \Leftrightarrow \dot{E}_R &= -e_R \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle + (Z - 1) \dot{E}_R.\end{aligned}\quad (182)$$

左辺の \dot{E}_R は観測量で有限量だから, 右辺も有限でなければならない. よって, $-e_R \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle$ のログ発散とくりこみ定数を含んだ2項目 $(Z - 1) \dot{E}_R$ の発散部分はキャンセルしないといけない. 式 (176) を思い出すと, $\langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle = \frac{e \dot{E}}{24\pi^2} \ln \Lambda + (\text{finite})$ だったから, $e \dot{E} = e_R \dot{E}_R$ に注意して,

$$0 = -e_R \frac{e_R \dot{E}_R}{24\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} - (Z - 1) \dot{E}_R \quad (183)$$

を得る. これを解いて,

$$Z = 1 - \frac{e_R^2}{24\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \quad (184)$$

を得る. これでくりこみが完了した. 今はカレントのログ発散しか議論していないが, エネルギー運動量テンソル $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ などもしっかりとコンシステントにくりこまれていることが確認できる.

ちなみに, このくりこみ定数 Z (184) は外場がないときの普通のスカラー QED の結果とコンシステントである (例えば, Srednicki [192] に載ってる). β 関数は,

$$\beta(\mu) := \mu \frac{de_R}{d\mu} = \frac{e_R^3}{48\pi^2} + \mathcal{O}(e_R^5). \quad (185)$$

なので, 外場を強くすると QED の場合は結合定数がログで強くなってゆくという良く知られた結果をちゃんと再現する. ちなみに, 同じような方法で QCD の β 関数も再現できて漸近的自由であることを確かめることができる (誰かが論文にしているかは知らない).

⁶⁰もう少し正確に書くと, 物質場 ϕ の波動関数のくりこみ定数を Z_2 ($\phi = \sqrt{Z_1} \phi_R$), ゲージ場 A^μ の波動関数のくりこみ定数を Z_3 ($A^\mu = \sqrt{Z_3} A_R^\mu$) と呼ぶのが QED の慣習で, このときラグランジアン (162) は,

$$\mathcal{L} = |(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = |(\sqrt{Z_2}\partial^\mu + i\underbrace{\sqrt{Z_2Z_3}e}_{:=Z_1e_R}A_R^\mu)\phi_R|^2 - Z_2m^2|\phi_R|^2 - \frac{1}{4}Z_3F_R^{\mu\nu}F_{R\mu\nu}. \quad (180)$$

ここで, 慣習に従って, 電荷のくりこみ定数を Z_1 と定義した. ラグランジアンはゲージ不変じゃないといけない. つまり, 共偏微分 $(\sqrt{Z_2}\partial^\mu + iZ_1e_RA_R^\mu)\phi_R$ はゲージ変換 $\phi_R \rightarrow \phi_R e^{ie_R\chi}$, $A_R^\mu \rightarrow A_R^\mu - \partial^\mu\chi$ に対して共変になっていて欲しいので, $\sqrt{Z_2} = Z_1$ でなければいけない (本当は Ward 恒等式を使ってまじめに示す). よって,

$$Z_1e_R = \sqrt{Z_2Z_3}e \Rightarrow e_R = \sqrt{Z_3}e. \quad (181)$$

なお, 今はどうでも良いので質量くりこみは考えなかった. これは, バックリアクションはフェルミオンの tadpole が古典電場と相互作用するようなダイアグラムに対応するので, バーテックスのくりこみしか効かないため. 質量くりこみ (プロパゲーターの自己エネルギー補正) はゲージ場に量子的なゆらぎを入れないと出て来ない.

5.3.3 エネルギー保存

0 次の断熱正則化のうれしい点の1つはエネルギー保存則をちゃんと守ることである. このことを陽に確かめる. (適当にやった正則化が保存則と常に一貫しているとは限らない. 断熱正則化のオーダーを変えたりしても保存則が破れたりする.)

その前に系の全エネルギーがちゃんと有限に計算できていることをまず確かめる. 系の全エネルギー \mathcal{E} は,

$$\mathcal{E} = \frac{E^2}{2} + \langle 0; \text{in} | : T^{00} : | 0; \text{in} \rangle \quad (186)$$

で与えられる. ここで, $\langle 0; \text{in} | : T^{00} : | 0; \text{in} \rangle$ は断熱正則化した後の物質場のエネルギーで,

$$\begin{aligned} \langle 0; \text{in} | : T^{00} : | 0; \text{in} \rangle &= \langle 0; \text{in} | : \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + ((\partial - e\mathbf{A})\phi)^\dagger \cdot ((\partial - e\mathbf{A})\phi) + m^2 \phi^\dagger \phi : | 0; \text{in} \rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{\frac{\Omega_{\mathbf{p}}^2 + \left(\frac{\dot{\Omega}_{\mathbf{p}}}{2\Omega_{\mathbf{p}}}\right)^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}{2\Omega_{\mathbf{p}}}}_{= \text{裸の量}} - \underbrace{\frac{\omega_{\mathbf{p}}^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2}{2\omega_{\mathbf{p}}}}_{= 0 \text{ 次の断熱正則化}} \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[|eE|^2 \frac{1}{8} \frac{(p_3 - eA^3)^2}{\omega_{\mathbf{p}}^5} + \mathcal{O}(\omega_{\mathbf{p}}^{-4}) \right] \\ &= E^2 \times \frac{e^2}{48\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + (\text{finite}) . \end{aligned} \quad (187)$$

物質場のエネルギーのログ発散は電場のくりこみ因子 $E = \sqrt{Z} E_R$ によって自動的にキャンセルしている. 実際,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= Z \frac{E_R^2}{2} + \langle 0; \text{in} | : T^{00} : | 0; \text{in} \rangle \\ &= \frac{E_R^2}{2} + [(Z - 1)E_R^2 + \langle 0; \text{in} | : T^{00} : | 0; \text{in} \rangle] \\ &= \frac{E_R^2}{2} + \left[-\frac{e_R^2}{24\pi^2} \frac{E_R^2}{2} + E_R^2 \times \frac{e_R^2}{48\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + (\text{finite}) \right] \\ &= \frac{E_R^2}{2} + (\text{finite}) . \end{aligned} \quad (188)$$

次にエネルギー保存則を示す. 全エネルギーの時間微分を計算すれば,

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} &= E \dot{E} + \partial_t \left[\underbrace{\langle 0; \text{in} | T^{00} | 0; \text{in} \rangle}_{= \text{裸の量}} - \underbrace{\langle 0; \text{in} | (T^{00})^{(0)} | 0; \text{in} \rangle}_{= 0 \text{ 次の断熱正則化}} \right] \\ &= -eE \left[\underbrace{\langle 0; \text{in} | j^3 | 0; \text{in} \rangle}_{= \text{裸の量}} - \underbrace{\langle 0; \text{in} | (j^3)^{(0)} | 0; \text{in} \rangle}_{= 0 \text{ 次の断熱正則化}} \right] + \partial_t \left[\underbrace{\langle 0; \text{in} | T^{00} | 0; \text{in} \rangle}_{= \text{裸の量}} - \underbrace{\langle 0; \text{in} | (T^{00})^{(0)} | 0; \text{in} \rangle}_{= 0 \text{ 次の断熱正則化}} \right] \\ &= \left[\langle 0; \text{in} | \dot{T}^{00} | 0; \text{in} \rangle - eE \langle 0; \text{in} | j^3 | 0; \text{in} \rangle \right] - \left[\partial_t \langle 0; \text{in} | (T^{00})^{(0)} | 0; \text{in} \rangle - eE \langle 0; \text{in} | (j^3)^{(0)} | 0; \text{in} \rangle \right] . \end{aligned} \quad (189)$$

1 項目 (裸の量) については, もともとの裸のラグランジアン (162) の対称性の帰結としてエネルギーは保存しないといけないから $\langle 0; \text{in} | \dot{T}^{00} | 0; \text{in} \rangle - eE \langle 0; \text{in} | j^3 | 0; \text{in} \rangle = 0$ である. 実際, 空間一様性と運

動方程式を使うと、

$$\begin{aligned}
& \langle 0; \text{in} | \dot{T}^{00} | 0; \text{in} \rangle \\
&= \langle 0; \text{in} | \partial_t \left[|\dot{\phi}|^2 + |\partial\phi|^2 + |(\partial_3 + ieA^3)\phi|^2 + m^2|\phi|^2 \right] \\
&= 2 \text{Re} \left[\dot{\phi}^\dagger \ddot{\phi} + (\partial\dot{\phi})^\dagger \cdot (\partial\phi) + ((\partial_3 + ieA^3)\dot{\phi})^\dagger (\partial_3 + ieA^3)\phi - ieE((\partial_3 + ieA^3)\phi)^\dagger \phi + m^2\dot{\phi}^\dagger \phi \right] | 0; \text{in} \rangle \\
&= \langle 0; \text{in} | 2 \text{Re} \left[\dot{\phi}^\dagger (\partial^2\phi + (p_3 + ieA^3)^2\phi) - \dot{\phi}^\dagger \partial^2\phi - \dot{\phi}^\dagger (\partial_3 + ieA^3)^2\phi - ieE((\partial_3 + ieA^3)\phi)^\dagger \phi + m^2\dot{\phi}^\dagger \phi \right] | 0; \text{in} \rangle \\
&\quad + \underbrace{\partial \langle 0; \text{in} | \dots | 0; \text{in} \rangle}_{\text{空間一様性より } 0} \\
&= \langle 0; \text{in} | 2 \text{Re} \left[-ieE((\partial_3 + ieA^3)\phi)^\dagger \phi \right] | 0; \text{in} \rangle \\
&= eE \langle 0; \text{in} | \underbrace{+i\dot{\phi}^\dagger (\partial_3 + ieA^3)\phi - i((\partial_3 + ieA^3)\phi)^\dagger \phi}_{= j^3} | 0; \text{in} \rangle = eE \langle 0; \text{in} | j^3 | 0; \text{in} \rangle \tag{190}
\end{aligned}$$

となって、たしかに $\langle 0; \text{in} | \dot{T}^{00} | 0; \text{in} \rangle - eE \langle 0; \text{in} | j^3 | 0; \text{in} \rangle = 0$. 保存則を満たすかどうかで非自明なのは、2項目の断熱正則化によって差引いた部分であるが、0次の断熱正則化はちゃんと $\partial_t \langle 0; \text{in} | (T^{00})^{(0)} | 0; \text{in} \rangle - eE \langle 0; \text{in} | (j^3)^{(0)} | 0; \text{in} \rangle = 0$ を満たす. 実際、 $\langle 0; \text{in} | (T^{00})^{(0)} | 0; \text{in} \rangle = \omega_p$ と $\langle 0; \text{in} | (j^3)^{(0)} | 0; \text{in} \rangle = (p_3 - eA^3)/\omega_p$ だったことを思い出せば、

$$\partial_t \langle 0; \text{in} | (T^{00})^{(0)} | 0; \text{in} \rangle = \partial_t \omega_p = \frac{eE(p_3 - eA^3)}{\omega_p} = eE \langle 0; \text{in} | (j^3)^{(0)} | 0; \text{in} \rangle . \tag{191}$$

以上の計算をまとめれば、

$$\partial_t \mathcal{E} = 0 \tag{192}$$

である. よってたしかにエネルギーは保存する.

5.4 典型的な時間発展

バックリアクション問題 (165) は解析的に厳密に解くことはできない (田屋が知る限り現存の唯一の例外は massless の QED₁₊₁ で、この場合は bosonization を利用して解けるらしい [193, 81]). なので普通は数値的に解くしかない. 数値計算の典型的な結果を図 9 に示した. 一番大事なことは電場は振動しながら decay してゆく、ということ. 粒子は生成後、電場が振動しているために振動運動し、粒子生成が起こっている運動量 $\mathbf{0}$ 付近の場所に戻ってくるたびに量子干渉を起こし複雑な運動量分布を示すようになる. 振動が起こる直感的な理由は以下の通り: 粒子生成が起きた後、電場は電子を加速するので、電場の方に伝導電流が流れる. 電動電流が流れると Maxwell 方程式 $\dot{\mathbf{E}} = -e\mathbf{j}$ に従って電場の大きさは小さくなってゆく. 電場の大きさはいつか 0 になるが、そのとき電子の運動が止まるわけではなく、電流は同じ方向に流れ続ける. よって、電場は 0 を超えてマイナスの値を取る. そうすると、電場は電子を逆方向に加速しだすので、伝導電流の大きさが小さくなってゆく. いつか伝導電流の大きさは 0 になるが、そのときは電場の値はマイナスに非ゼロである. よって、伝導電流はマイナスの大きさを取り始め、このとき、Maxwell 方程式に従って、電場の大きさが増えだす. このようなダイナミクスを繰り返すことで電場は振動する.

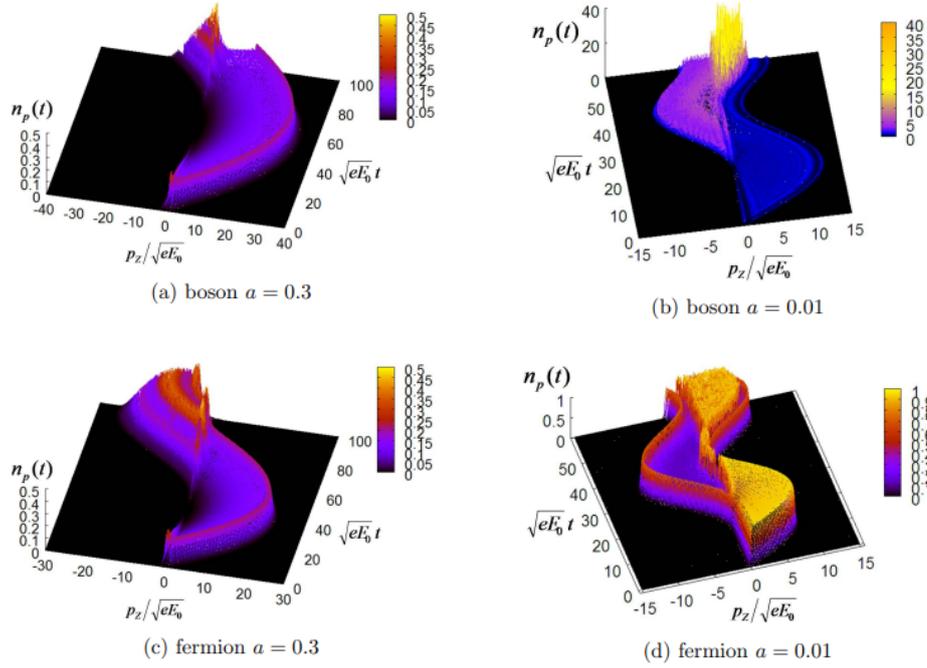


Figure 13: The time evolution of the longitudinal momentum distributions with back reaction ($e = 1$).

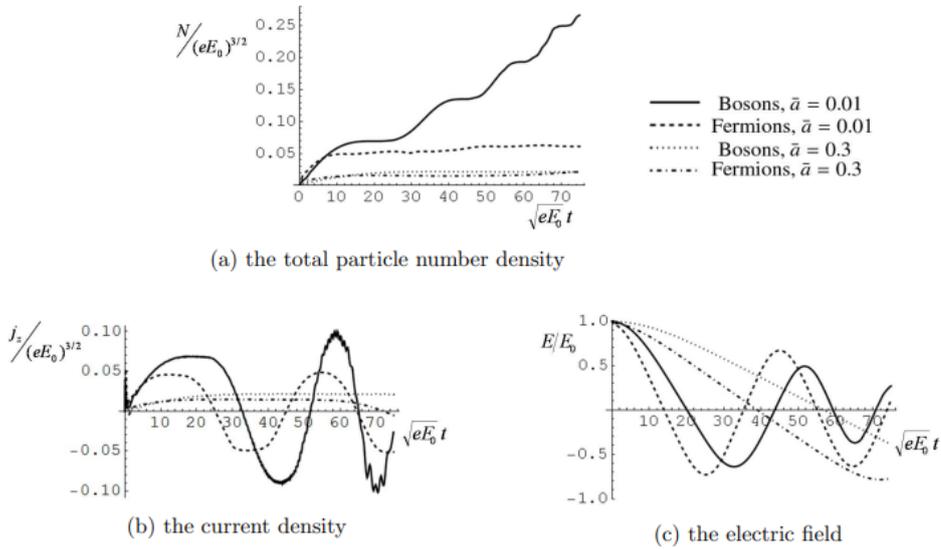


Figure 14: The time evolution of the total particle number density, the current density and the electric field ($e = 1$). For fermions, the values averaged over the spin states are shown in (a) and (b).

図 9: バックリアクションを取り込んだ時の典型的な時間発展の様子 (図は丹治 [152] より). 左は縦運動量粒子分布の時間発展. 右は粒子数 N , カレント j^3 , 電場 E の時間発展.

かなり微妙な議論だが、電場が振動することを解析的になんとなく理解できないこともない [152]. 式 (178) で Zitterbewegung の寄与 $e\frac{2\omega_p}{eE}S$ は小さいと思って落とすと⁶¹,

$$\langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 2|\beta_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \frac{p_3 - eA^3}{\omega_{\mathbf{p}}} \quad (193)$$

と書ける. この式を以下のように雑に評価する:

- 電場の時間変調が遅く, さらに量子干渉はあまり効かない, と思い込むことにすれば, $|\beta_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2$ は一様定常電場の結果 (71) から

$$\begin{aligned} |\beta_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2 &\sim \exp \left[-\pi \frac{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2}{|eE(t)|} \right] \\ &\times \left[\Theta(-p_3) \Theta(p_3 - eA^3(t)) \Theta(-eA^3(t)) + \Theta(p_3) \Theta(-p_3 + eA^3(t)) \Theta(+eA^3(t)) \right] \end{aligned} \quad (194)$$

と近似できるだろう. ここで縦運動量分布をステップ関数で近似した. これは, (例えば $eA^3 < 0$ なら) kinetic momentum $P_3 = p_3 - eA^3$ が $0 < P_3 < -eA^3(t) = \int^t dt' eE(t')$ に入れ, ということを行っている (たしかに図 9 でも大体そうになっている). これは, 物理的には励起エネルギーが一番小さい $P_3 = 0$ で粒子生成が起きて, そのあとに粒子は電場に加速されるので P_3 は最大でも $\int eE(t)$ までしか広がらないだろう, ということを行っている.

- 電子の運動は超相対論的である, と思い込む. つまり,

$$\frac{p_3 - eA^3}{\omega_{\mathbf{p}}} \sim \text{sgn}(p_3 - eA^3). \quad (195)$$

- なんとなく電場の強さは初期の強さ $E(0) =: E_0$ で近似でき, $E(t) \sim E_0$ であるとする. すると⁶²

$$\begin{aligned} \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle &\sim 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{sgn}(p_3 - eA^3) \exp \left[-\pi \frac{m^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2}{eE(t)} \right] \\ &\times \left[\Theta(p_3) \Theta(-p_3 - eA^3(t)) \Theta(-eA^3(t)) + \Theta(-p_3) \Theta(p_3 + eA^3(t)) \Theta(+eA^3(t)) \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi^3} |eE(t)| \exp \left[-\pi \frac{m^2}{|eE(t)|} \right] eA^3 \\ &\sim -\frac{1}{2\pi^3} |eE_0| \exp \left[-\pi \frac{m^2}{|eE_0|} \right] eA^3 \end{aligned} \quad (196)$$

最後の近似で $E(t) \sim E_0$ を使った.

⁶¹ $|\beta_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2$ を適当に近似すれば Zitterbewegung の寄与も近似できるので, なにかうまい $|\beta_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2$ の近似があればちゃんと減衰振動まで再現できるような解析的議論ができるはずだと思う.

⁶²この近似を使わなくても運動量積分は評価できて, 式 (196) の 2 行目のようになる. 2 行目を使うと, バックリアクシヨンの式 (165) は \tanh を使って解くことが mathematica によるできるらしいが, この解は振動しないですぐに定常値にサチるような解になっていて変. フェルミオンの $m \rightarrow 0$ の極限ならばそこそこ合理的な近似をしているように思えないこともないのだが, なにか致命的なのだろうか?

一連の近似で得られた式 (196) をバックリアクションの式 (165) に入れると,

$$\begin{aligned} -\ddot{A}^3 &= +\frac{e^3}{2\pi^3}|E_0| \exp\left[-\pi\frac{m^2}{|eE_0|}\right] A^3 \\ \Rightarrow E = -\dot{A}^3 &= E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{t}{t_{\text{osc}}}\right) \text{ with } t_{\text{osc}} = \frac{\pi^2}{e}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[\frac{\pi}{2}\frac{m^2}{|eE_0|}\right]. \end{aligned} \quad (197)$$

例えば, $m = 0$ ならば $t_{\text{osc}} = 12.3$ くらいで電場は 0 を切るということになる. 図 9 と比べると思ったより悪い近似ではない.

話は飛ぶが, マスレスのフェルミオンで電場と平行に強い磁場もいるときには, 最低ランダウ準位近似とカイラルアノマリーの関係式を活用することでバックリアクションの式 (196) を解析的に解くことができる [194, 195, 196]⁶³ (磁場が強くて最低ランダウ準位がよくなるとかなり良く数値計算と合う [197]). 磁場があるとエネルギー準位はランダウ量子化されて, 磁場が強いつきは最低準位しか効かない. このときフェルミオンの運動は 1 次元的になっている. したがって, U(1) カレント $j^3 = \psi_R^\dagger\psi_R - \psi_L^\dagger\psi_L$ はカイラル電荷 $j_5^0 = \psi_R^\dagger\psi_R - \psi_L^\dagger\psi_L$ と等しい⁶⁴. カイラルアノマリーの関係式,

$$\partial_t \langle 0; \text{in} | : j_5^0 : | 0; \text{in} \rangle = \frac{e^2}{4\pi^2} EB, \quad (198)$$

を思い出せば, バックリアクションの式 (165) は,

$$\dot{E} = -e \langle 0; \text{in} | : j^3 : | 0; \text{in} \rangle = -e \langle 0; \text{in} | : j_5^0 : | 0; \text{in} \rangle \Rightarrow \ddot{E} = -\frac{e^3}{4\pi^2} EB \quad (199)$$

と書き直せる. 空間一様性から磁場にはいかなるバックリアクションも働かないことに注意 $B(t) = B$. これを解いて,

$$E(t) = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{t}{t_{\text{osc}}}\right) \text{ with } t_{\text{osc}} = \frac{\pi^2}{e}\frac{1}{\sqrt{eB}}. \quad (200)$$

マスレスの極限だとギャップが閉じるので真空分極ができなくなる. よって電場は decay せずに振動し続ける. なお, この計算は膨張時空にも簡単に拡張できたりする. 時空が膨張している場合は電場は膨張によって引き延ばされて decay する.

参考文献

- [1] G. V. Dunne, Heisenberg-Euler effective Lagrangians: Basics and extensions, pp. 445–522. 6, 2004. [arXiv:hep-th/0406216](https://arxiv.org/abs/hep-th/0406216).
- [2] R. Ruffini, G. Vereshchagin, and S.-S. Xue, “Electron-positron pairs in physics and astrophysics: from heavy nuclei to black holes,” Phys. Rept. **487** (2010) 1–140, [arXiv:0910.0974](https://arxiv.org/abs/0910.0974) [[astro-ph.HE](https://arxiv.org/archive/hep)].

⁶³節の冒頭に「massless QED₁₊₁ のバックリアクションは bosonization を利用して解けるらしい [193, 81]」と書いたが, ひょっとしたらこのカイラルアノマリーの視点と比較すると楽しいかもしれない.

⁶⁴違う説明としては, 強い磁場の下ではスピンは磁場の方向に偏極している. もしも磁場の方向 (と反対の方向) に粒子が走れば, それはスピンの運動量が平行 (反平行) なので $m \rightarrow 0$ なら, ヘリシティ = カイラリティを +1(−1) 産む. 一方で, 粒子が走った方向に電流は流れるので, 磁場の方向 (と反対の方向) に粒子が走れば, それは電流に +1(−1) の寄与を出す. よって, 強い磁場の下ではカイラリティと電流は同じ.

- [3] T. Oka, “Strong field physics in condensed matter,” 2, 2011. [arXiv:1102.2482](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [4] A. Di Piazza, C. Muller, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, “Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems,” [Rev. Mod. Phys.](#) **84** (2012) 1177, [arXiv:1111.3886](#) [[hep-ph](#)].
- [5] F. Hebenstreit, [Schwinger effect in inhomogeneous electric fields](#). PhD thesis, Graz U., 2011. [arXiv:1106.5965](#) [[hep-ph](#)].
- [6] D. Kawai, Y. Sato, and K. Yoshida, “A holographic description of the Schwinger effect in a confining gauge theory,” [Int. J. Mod. Phys. A](#) **30** no. 11, (2015) 1530026, [arXiv:1504.00459](#) [[hep-th](#)].
- [7] F. Gelis and N. Tanji, “Schwinger mechanism revisited,” [Prog. Part. Nucl. Phys.](#) **87** (2016) 1–49, [arXiv:1510.05451](#) [[hep-ph](#)].
- [8] H. Taya, [Schwinger Mechanism in QCD and its Applications to Ultra-relativistic Heavy Ion Collisions](#). PhD thesis, Tokyo U., 2017.
- [9] K. Fukushima, “Extreme matter in electromagnetic fields and rotation,” [Prog. Part. Nucl. Phys.](#) **107** (2019) 167–199, [arXiv:1812.08886](#) [[hep-ph](#)].
- [10] C. Schneider, [Worldline instantons and the Sauter-Schwinger effect](#). PhD thesis, May, 2019. https://duepublico2.uni-due.de/receive/duepublico_mods_00070116.
- [11] P. Copinger and S. Pu, “Chirality production with mass effects — Schwinger pair production and the axial Ward identity,” [Int. J. Mod. Phys. A](#) **35** no. 28, (2020) 2030015, [arXiv:2008.03635](#) [[hep-ph](#)].
- [12] A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, and G. Torgrimsson, “Advances in QED with intense background fields,” [arXiv:2203.00019](#) [[hep-ph](#)].
- [13] F. Sauter, “Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs,” [Z. Phys.](#) **69** (1931) 742–764.
- [14] F. Sauter, “Zum ”Kleinschen Paradoxon”,” [Z. Phys.](#) **73** (1932) 547–552.
- [15] O. Klein, “Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac,” [Z. Phys.](#) **53** (1929) 157.
- [16] W. Heisenberg and H. Euler, “Consequences of Dirac’s theory of positrons,” [Z. Phys.](#) **98** no. 11-12, (1936) 714–732, [arXiv:physics/0605038](#).
- [17] H. Euler and B. Kockel, “Über die streuung von licht an licht nach der diracschen theorie,” [Naturwissenschaften](#) **23** no. 15, (Apr, 1935) 246–247. <https://doi.org/10.1007/BF01493898>.

- [18] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” [Phys. Rev.](#) **82** (1951) 664–679.
- [19] G. V. Dunne and T. M. Hall, “Borel summation of the derivative expansion and effective actions,” [Phys. Rev. D](#) **60** (1999) 065002, [arXiv:hep-th/9902064](#).
- [20] A. Florio, “Schwinger pair production from Padé-Borel reconstruction,” [Phys. Rev. D](#) **101** no. 1, (2020) 013007, [arXiv:1911.03489 \[hep-th\]](#).
- [21] G. V. Dunne and C. Schubert, “Two loop Euler-Heisenberg QED pair production rate,” [Nucl. Phys. B](#) **564** (2000) 591–604, [arXiv:hep-th/9907190](#).
- [22] G. V. Dunne and Z. Harris, “Higher-loop Euler-Heisenberg transseries structure,” [Phys. Rev. D](#) **103** no. 6, (2021) 065015, [arXiv:2101.10409 \[hep-th\]](#).
- [23] A. I. Nikishov, “Pair production by a constant external field,” [Zh. Eksp. Teor. Fiz.](#) **57** (1969) 1210–1216.
- [24] T. D. Cohen and D. A. McGady, “The Schwinger mechanism revisited,” [Phys. Rev. D](#) **78** (2008) 036008, [arXiv:0807.1117 \[hep-ph\]](#).
- [25] M. S. Marinov and V. S. Popov, “Pair production in electromagnetic field (case of arbitrary spin),” [Yad. Fiz.](#) **15** (1972) 1271–1285.
- [26] V. F. Weisskopf, “Über die Elektrodynamik des Vakuums auf Grund der Quanten-Theorie des Elektrons,” [Dan. Mat. Fys. Medd.](#) **14** (1936) 1–39. <https://cds.cern.ch/record/406571>.
- [27] V. S. Vanyashin and M. V. Terentev, “The Vacuum Polarization of a Charged Vector Field,” [Zh. Eksp. Teor. Fiz.](#) **48** no. 2, (1965) 565–573.
- [28] N. K. Nielsen and P. Olesen, “An Unstable Yang-Mills Field Mode,” [Nucl. Phys. B](#) **144** (1978) 376–396.
- [29] N. K. Nielsen and P. Olesen, “Electric Vortex Lines From the Yang-Mills Theory,” [Phys. Lett. B](#) **79** (1978) 304.
- [30] S.-J. Chang and N. Weiss, “Instability of Constant Yang-Mills Fields,” [Phys. Rev. D](#) **20** (1979) 869.
- [31] N. Tanji and K. Itakura, “Schwinger mechanism enhanced by the Nielsen–Olesen instability,” [Phys. Lett. B](#) **713** (2012) 117–121, [arXiv:1111.6772 \[hep-ph\]](#).
- [32] K. Hattori, K. Itakura, and S. Ozaki, “Note on all-order Landau-level structures of the Heisenberg-Euler effective actions for QED and QCD,” [arXiv:2001.06131 \[hep-ph\]](#).
- [33] E. Brezin and C. Itzykson, “Pair Production in Vacuum by an Alternating Field,” [Phys. Rev. D](#) **2** no. 7, (Oct., 1970) 1191–1199.

- [34] V. S. Popov, “Production of e^+e^- Pairs in an Alternating External Field,” JETP Lett. **13** (1971) 185.
- [35] V. S. Popov, “Pair production in a variable external field (quasiclassical approximation),” Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1971) 1334–1351.
- [36] A. Dykhne, “Adiabatic perturbation of discrete spectrum states,” Sov. Phys. JETP **14** no. 941, (1962) 1–13.
- [37] J. P. Davis and P. Pechukas, “Nonadiabatic transitions induced by a time - dependent hamiltonian in the semiclassical/adiabatic limit: The two - state case,” The Journal of Chemical Physics **64** no. 8, (1976) 3129–3137.
<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.432648>.
- [38] K. Fukushima and T. Shimazaki, “Lefschetz-thimble inspired analysis of the Dykhne–Davis–Pechukas method and an application for the Schwinger Mechanism,” Annals Phys. **415** (2020) 168111, [arXiv:1907.12224](https://arxiv.org/abs/1907.12224) [quant-ph].
- [39] H. Taya, T. Fujimori, T. Misumi, M. Nitta, and N. Sakai, “Exact WKB analysis of the vacuum pair production by time-dependent electric fields,” JHEP **03** (2021) 082, [arXiv:2010.16080](https://arxiv.org/abs/2010.16080) [hep-th].
- [40] H. Taya, H. Fujii, and K. Itakura, “Finite pulse effects on e^+e^- pair creation from strong electric fields,” Phys. Rev. D **90** no. 1, (2014) 014039, [arXiv:1405.6182](https://arxiv.org/abs/1405.6182) [hep-ph].
- [41] L. V. Keldysh, “Ionization in the Field of a Strong Electromagnetic Wave,” J. Exp. Theor. Phys. **20** no. 5, (1965) 1307–1314.
- [42] G. V. Dunne and C. Schubert, “Closed form two loop Euler-Heisenberg Lagrangian in a selfdual background,” Phys. Lett. B **526** (2002) 55–60, [arXiv:hep-th/0111134](https://arxiv.org/abs/hep-th/0111134).
- [43] G. V. Dunne and C. Schubert, “Two loop selfdual Euler-Heisenberg Lagrangians. 1. Real part and helicity amplitudes,” JHEP **08** (2002) 053, [arXiv:hep-th/0205004](https://arxiv.org/abs/hep-th/0205004).
- [44] G. V. Dunne and C. Schubert, “Two loop selfdual Euler-Heisenberg Lagrangians. 2. Imaginary part and Borel analysis,” JHEP **06** (2002) 042, [arXiv:hep-th/0205005](https://arxiv.org/abs/hep-th/0205005).
- [45] S. L. Lebedev and V. I. Ritus, “VIRIAL REPRESENTATION OF THE IMAGINARY PART OF THE LAGRANGE FUNCTION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD,” Sov. Phys. JETP **59** (1984) 237–244.
- [46] I. Huet, M. Rausch De Traubenberg, and C. Schubert, “Three-loop Euler-Heisenberg Lagrangian in 1+1 QED, part 1: single fermion-loop part,” JHEP **03** (2019) 167, [arXiv:1812.08380](https://arxiv.org/abs/1812.08380) [hep-th].
- [47] I. Huet, M. Rausch de Traubenberg, and C. Schubert, “Multiloop QED in the Euler-Heisenberg approach,” in 19th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics. 1, 2020. [arXiv:2001.06667](https://arxiv.org/abs/2001.06667) [hep-ph].

- [48] A. S. Gorsky, K. A. Saraikin, and K. G. Selivanov, “Schwinger type processes via branes and their gravity duals,” [Nucl. Phys. B](#) **628** (2002) 270–294, [arXiv:hep-th/0110178](#).
- [49] G. W. Semenoff and K. Zarembo, “Holographic Schwinger Effect,” [Phys. Rev. Lett.](#) **107** (2011) 171601, [arXiv:1109.2920 \[hep-th\]](#).
- [50] Y. Sato and K. Yoshida, “Potential Analysis in Holographic Schwinger Effect,” [JHEP](#) **08** (2013) 002, [arXiv:1304.7917 \[hep-th\]](#).
- [51] Y. Sato and K. Yoshida, “Universal aspects of holographic Schwinger effect in general backgrounds,” [JHEP](#) **12** (2013) 051, [arXiv:1309.4629 \[hep-th\]](#).
- [52] I. K. Affleck, O. Alvarez, and N. S. Manton, “Pair Production at Strong Coupling in Weak External Fields,” [Nucl. Phys. B](#) **197** (1982) 509–519.
- [53] E. S. Fradkin and D. M. Gitman, “Furry Picture for Quantum Electrodynamics With Pair Creating External Field,” [Fortsch. Phys.](#) **29** (1981) 381–412.
- [54] E. S. Fradkin, D. M. Gitman, and S. M. Shvartsman, [Quantum electrodynamics with unstable vacuum](#). 1991.
- [55] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, [Quantum Fields in Curved Space](#). Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2, 1984.
- [56] N. K. Glendenning and T. Matsui, “CREATION OF ANTI-Q Q PAIR IN A CHROMOELECTRIC FLUX TUBE,” [Phys. Rev. D](#) **28** (1983) 2890–2891.
- [57] K. Kajantie and T. Matsui, “Decay of Strong Color Electric Field and Thermalization in Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions,” [Phys. Lett. B](#) **164** (1985) 373–378.
- [58] G. Gatoff, A. K. Kerman, and T. Matsui, “The Flux Tube Model for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions: Electrohydrodynamics of a Quark Gluon Plasma,” [Phys. Rev. D](#) **36** (1987) 114.
- [59] F. Cooper and E. Mottola, “Initial Value Problems in Quantum Field Theory in the Large N Approximation,” [Phys. Rev. D](#) **36** (1987) 3114.
- [60] F. Cooper and E. Mottola, “Quantum Back Reaction in Scalar QED as an Initial Value Problem,” [Phys. Rev. D](#) **40** (1989) 456.
- [61] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, and E. Mottola, “Pair production in a strong electric field,” [Phys. Rev. Lett.](#) **67** (1991) 2427–2430.
- [62] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, and E. Mottola, “Fermion pair production in a strong electric field,” [Phys. Rev. D](#) **45** (1992) 4659–4671.

- [63] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, and B. Svetitsky, “Pair production in a strong electric field: An Initial value problem in quantum field theory,” [Int. J. Mod. Phys. E](#) **2** (1993) 333–380, [arXiv:hep-ph/0311293](#).
- [64] Y. Kluger, E. Mottola, and J. M. Eisenberg, “The Quantum Vlasov equation and its Markov limit,” [Phys. Rev. D](#) **58** (1998) 125015, [arXiv:hep-ph/9803372](#).
- [65] L. E. Parker and D. Toms, [Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Field and Gravity](#). Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 8, 2009.
- [66] D. Vasak, M. Gyulassy, and H. T. Elze, “Quantum Transport Theory for Abelian Plasmas,” [Annals Phys.](#) **173** (1987) 462–492.
- [67] I. Bialynicki-Birula, P. Gornicki, and J. Rafelski, “Phase space structure of the Dirac vacuum,” [Phys. Rev. D](#) **44** (1991) 1825–1835.
- [68] P. Zhuang and U. W. Heinz, “Relativistic quantum transport theory for electrodynamics,” [Annals Phys.](#) **245** (1996) 311–338, [arXiv:nucl-th/9502034](#).
- [69] F. Hebenstreit, R. Alkofer, and H. Gies, “Schwinger pair production in space and time-dependent electric fields: Relating the Wigner formalism to quantum kinetic theory,” [Phys. Rev. D](#) **82** (2010) 105026, [arXiv:1007.1099 \[hep-ph\]](#).
- [70] G. Aarts and J. Smit, “Real time dynamics with fermions on a lattice,” [Nucl. Phys. B](#) **555** (1999) 355–394, [arXiv:hep-ph/9812413](#).
- [71] G. Aarts and J. Smit, “Particle production and effective thermalization in inhomogeneous mean field theory,” [Phys. Rev. D](#) **61** (2000) 025002, [arXiv:hep-ph/9906538](#).
- [72] S. Borsanyi and M. Hindmarsh, “Low-cost fermions in classical field simulations,” [Phys. Rev. D](#) **79** (2009) 065010, [arXiv:0809.4711 \[hep-ph\]](#).
- [73] F. Hebenstreit, J. Berges, and D. Gelfand, “Simulating fermion production in 1+1 dimensional QED,” [Phys. Rev. D](#) **87** no. 10, (2013) 105006, [arXiv:1302.5537 \[hep-ph\]](#).
- [74] F. Hebenstreit, J. Berges, and D. Gelfand, “Real-time dynamics of string breaking,” [Phys. Rev. Lett.](#) **111** (2013) 201601, [arXiv:1307.4619 \[hep-ph\]](#).
- [75] F. Gelis and N. Tanji, “Formulation of the Schwinger mechanism in classical statistical field theory,” [Phys. Rev. D](#) **87** no. 12, (2013) 125035, [arXiv:1303.4633 \[hep-ph\]](#).
- [76] F. Gelis and N. Tanji, “Quark production in heavy ion collisions: formalism and boost invariant fermionic light-cone mode functions,” [JHEP](#) **02** (2016) 126, [arXiv:1506.03327 \[hep-ph\]](#).

- [77] V. Kasper, F. Hebenstreit, and J. Berges, “Fermion production from real-time lattice gauge theory in the classical-statistical regime,” [*Phys. Rev. D* **90** no. 2, \(2014\) 025016](#), [arXiv:1403.4849 \[hep-ph\]](#).
- [78] N. Tanji, “Electromagnetic currents induced by color fields,” [*Phys. Rev. D* **92** no. 12, \(2015\) 125012](#), [arXiv:1506.08442 \[hep-ph\]](#).
- [79] Y. Shi, J. Xiao, H. Qin, and N. J. Fisch, “Simulations of relativistic-quantum plasmas using real-time lattice scalar QED,” [*Phys. Rev. E* **97** no. 5, \(2018\) 053206](#), [arXiv:1802.00524 \[physics.plasm-ph\]](#).
- [80] D. Spitz and J. Berges, “Schwinger pair production and string breaking in non-Abelian gauge theory from real-time lattice improved Hamiltonians,” [*Phys. Rev. D* **99** no. 3, \(2019\) 036020](#), [arXiv:1812.05835 \[hep-ph\]](#).
- [81] G. Gold, D. A. Mcgady, S. P. Patil, and V. Vardanyan, “Backreaction of Schwinger pair creation in massive QED₂,” [*JHEP* **10** \(2021\) 072](#), [arXiv:2012.15824 \[hep-th\]](#).
- [82] S. S. Bulanov, N. B. Narozhny, V. D. Mur, and V. S. Popov, “On e+ e- pair production by a focused laser pulse in vacuum,” [*Phys. Lett. A* **330** \(2004\) 1–6](#), [arXiv:hep-ph/0403163](#).
- [83] H. R. Reiss, “Absorption of light by light,” [*Journal of Mathematical Physics* **3** no. 1, \(1962\) 59–67](#), <https://doi.org/10.1063/1.1703787>. <https://doi.org/10.1063/1.1703787>.
- [84] V. I. Ritus, “Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field,” [*Journal of Soviet Laser Research* **6** no. 5, \(Sep, 1985\) 497–617](#). <https://doi.org/10.1007/BF01120220>.
- [85] I. A. Aleksandrov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, “Locally-constant field approximation in studies of electron-positron pair production in strong external fields,” [*Phys. Rev. D* **99** no. 1, \(2019\) 016020](#), [arXiv:1811.01419 \[hep-ph\]](#).
- [86] I. A. Aleksandrov and C. Kohlfürst, “Pair production in temporally and spatially oscillating fields,” [*Phys. Rev. D* **101** no. 9, \(2020\) 096009](#), [arXiv:1912.09924 \[hep-ph\]](#).
- [87] G. V. Dunne and C. Schubert, “Worldline instantons and pair production in inhomogeneous fields,” [*Phys. Rev. D* **72** \(2005\) 105004](#), [arXiv:hep-th/0507174](#).
- [88] G. V. Dunne, Q.-h. Wang, H. Gies, and C. Schubert, “Worldline instantons. II. The Fluctuation prefactor,” [*Phys. Rev. D* **73** \(2006\) 065028](#), [arXiv:hep-th/0602176](#).
- [89] G. V. Dunne and Q.-h. Wang, “Multidimensional Worldline Instantons,” [*Phys. Rev. D* **74** \(2006\) 065015](#), [arXiv:hep-th/0608020](#).
- [90] H. Taya, M. Hongo, and T. N. Ikeda, “Analytical WKB theory for high-harmonic generation and its application to massive Dirac electrons,” [arXiv:2105.12446 \[cond-mat.str-el\]](#).

- [91] N. Fröman and P. O. Fröman, Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. 2005.
- [92] S. P. Kim and D. N. Page, “Schwinger pair production via instantons in a strong electric field,” Phys. Rev. D **65** (2002) 105002, [arXiv:hep-th/0005078](#).
- [93] S. P. Kim and D. N. Page, “Schwinger pair production in electric and magnetic fields,” Phys. Rev. D **73** (2006) 065020, [arXiv:hep-th/0301132](#).
- [94] S. P. Kim and D. N. Page, “Improved Approximations for Fermion Pair Production in Inhomogeneous Electric Fields,” Phys. Rev. D **75** (2007) 045013, [arXiv:hep-th/0701047](#).
- [95] M. V. Barry, “Uniform Asymptotic Smoothing of Stokes’s Discontinuities,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **422** (1989) 7–21.
- [96] R. B. Dingle, Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation. Academic Press, New York and London, 1973.
- [97] L. Li, T. Nakama, C. M. Sou, Y. Wang, and S. Zhou, “Gravitational Production of Superheavy Dark Matter and Associated Cosmological Signatures,” JHEP **07** (2019) 067, [arXiv:1903.08842 \[astro-ph.CO\]](#).
- [98] E. Brezin and C. Itzykson, “Pair production in vacuum by an alternating field,” Phys. Rev. D **2** (1970) 1191–1199.
- [99] C. K. Dumlu and G. V. Dunne, “Interference Effects in Schwinger Vacuum Pair Production for Time-Dependent Laser Pulses,” Phys. Rev. D **83** (2011) 065028, [arXiv:1102.2899 \[hep-th\]](#).
- [100] E. Strobel and S.-S. Xue, “Semiclassical pair production rate for time-dependent electrical fields with more than one component: WKB-approach and world-line instantons,” Nucl. Phys. B **886** (2014) 1153–1176, [arXiv:1312.3261 \[hep-th\]](#).
- [101] A. M. Perelomov, V. S. Popov, and M. V. Terent’ev, “Ionization of Atoms in an Alternating Electric Field,” Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics **23** (Nov., 1966) 924.
- [102] V. S. Popov, V. D. Mur, and B. M. Karnakov, “The imaginary-time method for relativistic problems,” Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **66** no. 4, (Aug, 1997) 229–235. <https://doi.org/10.1134/1.567459>.
- [103] V. S. Popov, B. M. Karnakov, and V. D. Mur, “On the relativistic theory of tunneling,” Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters **79** no. 6, (Mar, 2004) 262–267. <https://doi.org/10.1134/1.1759406>.
- [104] V. S. Popov, “Imaginary-time method in quantum mechanics and field theory,” Phys. Atom. Nucl. **68** (2005) 686–708.

- [105] D. B. Blaschke, A. V. Prozorkevich, G. Ropke, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, D. S. Shkirmanov, and S. A. Smolyansky, “Dynamical Schwinger effect and high-intensity lasers. realising nonperturbative QED,” [*Eur. Phys. J. D* **55** \(2009\) 341–358](#), [arXiv:0811.3570](#) [[physics.plasm-ph](#)].
- [106] D. B. Blaschke, V. V. Dmitriev, G. Ropke, and S. A. Smolyansky, “BBGKY kinetic approach for an $e^-e^+\gamma$ plasma created from the vacuum in a strong laser-generated electric field: The one-photon annihilation channel,” [*Phys. Rev. D* **84** \(2011\) 085028](#), [arXiv:1105.5397](#) [[hep-ph](#)].
- [107] A. Otto and B. Kämpfer, “Afterglow of the dynamical Schwinger process: soft photons amass,” [*Phys. Rev. D* **95** no. 12, \(2017\) 125007](#), [arXiv:1611.04438](#) [[hep-ph](#)].
- [108] I. A. Aleksandrov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, “Photon emission in strong fields beyond the locally-constant field approximation,” [*Phys. Rev. D* **100** no. 11, \(2019\) 116003](#), [arXiv:1909.03888](#) [[hep-ph](#)].
- [109] I. A. Aleksandrov, A. D. Panferov, and S. A. Smolyansky, “Radiation signal accompanying the Schwinger effect,” [*Phys. Rev. A* **103** no. 5, \(2021\) 053107](#), [arXiv:2101.03507](#) [[physics.plasm-ph](#)].
- [110] A. Di Piazza, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, “Harmonic generation from laser-driven vacuum,” [*Phys. Rev. D* **72** \(Oct, 2005\) 085005](#).
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.085005>.
- [111] A. M. Fedotov and N. B. Narozhny, “Generation of harmonics by a focused laser beam in vacuum,” [*Phys. Lett. A* **362** \(2007\) 1–5](#), [arXiv:hep-ph/0604258](#).
- [112] M. Kuchiev and J. Ingham, “Enhanced Creation of High Energy Particles in Colliding Laser Beams,” [arXiv:1511.06806](#) [[hep-ph](#)].
- [113] G. Vampa, C. R. McDonald, G. Orlando, D. D. Klug, P. B. Corkum, and T. Brabec, “Theoretical Analysis of High-Harmonic Generation in Solids,” [*Physical Review Letters* **113** no. 7, \(Aug, 2014\) 073901](#). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.073901>.
- [114] G. Vampa, C. R. McDonald, G. Orlando, P. B. Corkum, and T. Brabec, “Semiclassical analysis of high harmonic generation in bulk crystals,” [*Physical Review B* **91** no. 6, \(Feb, 2015\) 064302](#). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.064302>.
- [115] A. R. Bell and J. G. Kirk, “Possibility of Prolific Pair Production with High-Power Lasers,” [*Phys. Rev. Lett.* **101** \(2008\) 200403](#).
- [116] A. M. Fedotov, N. B. Narozhny, G. Mourou, and G. Korn, “Limitations on the attainable intensity of high power lasers,” [*Phys. Rev. Lett.* **105** \(2010\) 080402](#), [arXiv:1004.5398](#) [[hep-ph](#)].

- [117] N. V. Elkina, A. M. Fedotov, I. Y. Kostyukov, M. V. Legkov, N. B. Narozhny, E. N. Nerush, and H. Ruhl, “QED cascades induced by circularly polarized laser fields,” [Phys. Rev. ST Accel. Beams](#) **14** (2011) 054401, [arXiv:1010.4528 \[hep-ph\]](#).
- [118] J. M. Luttinger and J. C. Ward, “Ground state energy of a many fermion system. 2.,” [Phys. Rev.](#) **118** (1960) 1417–1427.
- [119] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, “Effective Action for Composite Operators,” [Phys. Rev. D](#) **10** (1974) 2428–2445.
- [120] J. Berges, “Introduction to nonequilibrium quantum field theory,” [AIP Conf. Proc.](#) **739** no. 1, (2004) 3–62, [arXiv:hep-ph/0409233](#).
- [121] E. Mottola, “Gauge invariance in 2pi effective actions,” in [5th International Conference on Strong and Electroweak Matter](#), pp. 432–436. 2003. [arXiv:hep-ph/0304279](#).
- [122] M. E. Carrington, G. Kunstatter, and H. Zaraket, “2PI effective action and gauge invariance problems,” [Eur. Phys. J. C](#) **42** (2005) 253–259, [arXiv:hep-ph/0309084](#).
- [123] U. Reinosa and J. Serreau, “Ward Identities for the 2PI effective action in QED,” [JHEP](#) **11** (2007) 097, [arXiv:0708.0971 \[hep-th\]](#).
- [124] U. Reinosa and J. Serreau, “2PI functional techniques for abelian gauge theories,” [Nucl. Phys. A](#) **820** (2009) 139C–146C, [arXiv:0810.4883 \[hep-ph\]](#).
- [125] U. Reinosa and J. Serreau, “2PI functional techniques for gauge theories: QED,” [Annals Phys.](#) **325** (2010) 969–1017, [arXiv:0906.2881 \[hep-ph\]](#).
- [126] G. Fauth, J. Berges, and A. Di Piazza, “Collisional strong-field QED kinetic equations from first principles,” [Phys. Rev. D](#) **104** no. 3, (2021) 036007, [arXiv:2103.13437 \[hep-ph\]](#).
- [127] T. Zöller, [Nonequilibrium Formulation of Abelian Gauge Theories](#). PhD thesis, Darmstadt, Tech. Hochsch., 2013.
- [128] R. Schutzhold, H. Gies, and G. Dunne, “Dynamically assisted Schwinger mechanism,” [Phys. Rev. Lett.](#) **101** (2008) 130404, [arXiv:0807.0754 \[hep-th\]](#).
- [129] G. V. Dunne, H. Gies, and R. Schutzhold, “Catalysis of Schwinger Vacuum Pair Production,” [Phys. Rev. D](#) **80** (2009) 111301, [arXiv:0908.0948 \[hep-ph\]](#).
- [130] W. Franz, “Einfluß eines elektrischen Feldes auf eine optische Absorptionskante,” [Zeitschrift Naturforschung Teil A](#) **13** no. 6, (June, 1958) 484–489.
- [131] L. V. Keldysh, “The effect of a strong electric field on the optical properties of insulating crystals,” [Sov. Phys. JETP](#) **7** no. 5, (1958) 788–790.

- [132] K. Tharmalingam, “Optical absorption in the presence of a uniform field,” *Phys. Rev.* **130** (Jun, 1963) 2204–2206. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.2204>.
- [133] J. Callaway, “Optical Absorption in an Electric Field,” *Physical Review* **134** no. 4A, (May, 1964) 998–1000.
- [134] H. Taya, “Franz-Keldysh effect in strong-field QED,” *Phys. Rev. D* **99** no. 5, (2019) 056006, [arXiv:1812.03630](https://arxiv.org/abs/1812.03630) [hep-ph].
- [135] F. Hebenstreit, R. Alkofer, G. V. Dunne, and H. Gies, “Momentum signatures for Schwinger pair production in short laser pulses with sub-cycle structure,” *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 150404, [arXiv:0901.2631](https://arxiv.org/abs/0901.2631) [hep-ph].
- [136] C. K. Dumlu and G. V. Dunne, “The Stokes Phenomenon and Schwinger Vacuum Pair Production in Time-Dependent Laser Pulses,” *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 250402, [arXiv:1004.2509](https://arxiv.org/abs/1004.2509) [hep-th].
- [137] C. K. Dumlu, “Schwinger Vacuum Pair Production in Chirped Laser Pulses,” *Phys. Rev. D* **82** (2010) 045007, [arXiv:1006.3882](https://arxiv.org/abs/1006.3882) [hep-th].
- [138] J. Z. Kamiński, M. Twardy, and K. Krajewska, “Diffraction at a time grating in electron-positron pair creation from the vacuum,” *Phys. Rev. D* **98** no. 5, (2018) 056009, [arXiv:1807.05386](https://arxiv.org/abs/1807.05386) [hep-ph].
- [139] A. Ilderton, “Coherent quantum enhancement of pair production in the null domain,” *Phys. Rev. D* **101** no. 1, (2020) 016006, [arXiv:1910.03012](https://arxiv.org/abs/1910.03012) [quant-ph].
- [140] S. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, “Landau–zener–stückelberg interferometry,” *Physics Reports* **492** no. 1, (Jul, 2010) 1–30. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2010.03.002>.
- [141] E. K. G. Stückelberg, *Theorie der unelastischen Stöße zwischen Atomen*. Birkhäuser, 1933.
- [142] L. Kofman, A. D. Linde, and A. A. Starobinsky, “Towards the theory of reheating after inflation,” *Phys. Rev. D* **56** (1997) 3258–3295, [arXiv:hep-ph/9704452](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9704452).
- [143] R. Dabrowski and G. V. Dunne, “Superadiabatic particle number in Schwinger and de Sitter particle production,” *Phys. Rev. D* **90** no. 2, (2014) 025021, [arXiv:1405.0302](https://arxiv.org/abs/1405.0302) [hep-th].
- [144] R. Dabrowski and G. V. Dunne, “Time dependence of adiabatic particle number,” *Phys. Rev. D* **94** no. 6, (2016) 065005, [arXiv:1606.00902](https://arxiv.org/abs/1606.00902) [hep-th].
- [145] X.-G. Huang and H. Taya, “Spin-dependent dynamically assisted Schwinger mechanism,” *Phys. Rev. D* **100** no. 1, (2019) 016013, [arXiv:1904.08200](https://arxiv.org/abs/1904.08200) [hep-ph].
- [146] H. Taya, “Dynamically assisted Schwinger mechanism and chirality production in parallel electromagnetic field,” *Phys. Rev. Res.* **2** no. 2, (2020) 023257, [arXiv:2003.08948](https://arxiv.org/abs/2003.08948) [hep-ph].

- [147] G. Torgrimsson, C. Schneider, J. Oertel, and R. Schützhold, “Dynamically assisted Sauter-Schwinger effect — non-perturbative versus perturbative aspects,” [JHEP](#) **06** (2017) 043, [arXiv:1703.09203 \[hep-th\]](#).
- [148] G. Torgrimsson, C. Schneider, and R. Schützhold, “Sauter-Schwinger pair creation dynamically assisted by a plane wave,” [Phys. Rev. D](#) **97** no. 9, (2018) 096004, [arXiv:1712.08613 \[hep-ph\]](#).
- [149] G. Torgrimsson, “Perturbative methods for assisted nonperturbative pair production,” [Phys. Rev. D](#) **99** no. 9, (2019) 096002, [arXiv:1812.04607 \[hep-ph\]](#).
- [150] S. Takayoshi, J. Wu, and T. Oka, “Nonadiabatic Nonlinear Optics and Quantum Geometry – Application to the Twisted Schwinger Effect,” [arXiv:2005.01755 \[cond-mat.mes-hall\]](#).
- [151] X.-G. Huang, M. Matsuo, and H. Taya, “Spontaneous generation of spin current from the vacuum by strong electric fields,” [PTEP](#) **2019** no. 11, (2019) 113B02, [arXiv:1904.07593 \[hep-ph\]](#).
- [152] N. Tanji, “Dynamical view of pair creation in uniform electric and magnetic fields,” [Annals Phys.](#) **324** (2009) 1691–1736, [arXiv:0810.4429 \[hep-ph\]](#).
- [153] J. Ambjørn and R. J. Hughes, “Canonical quantisation in non-Abelian background fields,” [Annals of Physics](#) **145** no. 2, (Feb., 1983) 340–377.
- [154] K. Fukushima, “Simulating net particle production and chiral magnetic current in a CP -odd domain,” [Phys. Rev. D](#) **92** no. 5, (2015) 054009, [arXiv:1501.01940 \[hep-ph\]](#).
- [155] K. Fukushima, F. Gelis, and T. Lappi, “Multiparticle correlations in the Schwinger mechanism,” [Nucl. Phys. A](#) **831** (2009) 184–214, [arXiv:0907.4793 \[hep-ph\]](#).
- [156] Y. Nishida, “Full counting statistics of Schwinger pair production and annihilation,” [Phys. Rev. D](#) **104** no. 3, (2021) 031902, [arXiv:2106.09642 \[hep-th\]](#).
- [157] N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, “The Simplist processes in the pair creating electric field,” [Yad. Fiz.](#) **11** (1970) 1072.
- [158] A. I. Nikishov, “Barrier scattering in field theory removal of klein paradox,” [Nucl. Phys. B](#) **21** (1970) 346–358.
- [159] T. C. Adorno, S. P. Gavrilov, and D. M. Gitman, “Particle creation from the vacuum by an exponentially decreasing electric field,” [Phys. Scripta](#) **90** (2015) 074005, [arXiv:1409.7742 \[hep-th\]](#).
- [160] T. C. Adorno, S. P. Gavrilov, and D. M. Gitman, “Exactly solvable cases in QED with t-electric potential steps,” [Int. J. Mod. Phys. A](#) **32** no. 18, (2017) 1750105, [arXiv:1512.01288 \[hep-th\]](#).

- [161] T. C. Adorno, S. P. Gavrilov, and D. M. Gitman, “Particle creation by peak electric field,” [Eur. Phys. J. C **76** no. 8, \(2016\) 447](#), [arXiv:1605.09072 \[hep-th\]](#).
- [162] T. C. Adorno, S. P. Gavrilov, and D. M. Gitman, “Violation of vacuum stability by inverse square electric fields,” [Eur. Phys. J. C **78** no. 12, \(2018\) 1021](#), [arXiv:1807.01642 \[hep-th\]](#).
- [163] T. C. Adorno, S. P. Gavrilov, and D. M. Gitman, “Vacuum instability in a constant inhomogeneous electric field. A new example of exact nonperturbative calculations,” [Eur. Phys. J. C **80** no. 2, \(2020\) 88](#), [arXiv:1911.09809 \[hep-th\]](#).
- [164] T. N. Tomaras, N. C. Tsamis, and R. P. Woodard, “Pair creation and axial anomaly in light cone QED(2),” [JHEP **11** \(2001\) 008](#), [arXiv:hep-th/0108090](#).
- [165] A. Ilderton, “Localisation in worldline pair production and lightfront zero-modes,” [JHEP **09** \(2014\) 166](#), [arXiv:1406.1513 \[hep-th\]](#).
- [166] A. I. Breev, S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and A. A. Shishmarev, “Vacuum instability in time-dependent electric fields: New example of an exactly solvable case,” [Phys. Rev. D **104** no. 7, \(2021\) 076008](#), [arXiv:2106.06322 \[hep-th\]](#).
- [167] V. G. Bagrov and D. M. Gitman, [Exact solutions of relativistic wave equations in external electromagnetic fields](#), pp. 5–100. Tomsk State Pedagogical Institute, 1977.
- [168] V. G. Bagrov and D. Gitman, [The Dirac Equation and its Solutions](#). De Gruyter, 2014.
- [169] D. Volkov, “On a class of solutions of the dirac equation,” [Z. Phys **94** no. 3-4, \(1935\) 250–260](#).
- [170] A. I. Nikishov and V. I. Ritus, “Quantum Processes in the Field of a Plane Electromagnetic Wave and in a Constant Field 1,” [Sov. Phys. JETP **19** \(1964\) 529–541](#).
- [171] V. Ritus, “Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field,” [J. Sov. Laser Res.:\(United States\) **6** no. 5, \(1985\) .](#)
- [172] A. I. Nikishov, “Quantum processes in a constant electric field.,” [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**: 1262-72\(Oct 1970\).](#) . <https://www.osti.gov/biblio/4064423>.
- [173] H. Taya, “Mutual assistance between the Schwinger mechanism and the dynamical Casimir effect,” [Phys. Rev. Res. **2** no. 2, \(2020\) 023346](#), [arXiv:2003.12061 \[hep-ph\]](#).
- [174] H. Taya and Y. Yamada, “QFT approach to dressed particle processes in preheating and non-perturbative mechanism in kinematically-forbidden regime,” [arXiv:2207.03831 \[hep-th\]](#).
- [175] B. Candelpergher, J. C. Nosmas, and F. Pham, “Approche de la résurgence,” [Actualités mathématiques](#) (1993) .

- [176] A. Voros, “The return of the quartic oscillator. The complex WKB method,” *Annales de l’I.H.P. Physique théorique* **39** no. 3, (1983) 211–338.
www.numdam.org/item/AIHPA_1983__39_3_211_0/.
- [177] H. Dillinger, E. Delabaere, and F. Pham, “R esurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques,” *Annales de l’Institut Fourier* **43** no. 1, (1993) 163–199.
www.numdam.org/item/AIF_1993__43_1_163_0/.
- [178] E. Delabaere, H. Dillinger, and F. Pham, “Exact semiclassical expansions for one-dimensional quantum oscillators,” *Journal of Mathematical Physics* **38** no. 12, (1997) 6126–6184.
<https://doi.org/10.1063/1.532206>.
- [179] E. Delabaere and F. Pham, “Resurgent methods in semi-classical asymptotics,” *Annales de l’I.H.P. Physique théorique* **71** no. 1, (1999) 1–94.
www.numdam.org/item/AIHPA_1999__71_1_1_0/.
- [180] T. Aoki, T. Kawai, and Y. Takei, “The Bender-Wu Analysis and the Voros Theory,” *ICM-90 Satellite Conference Proceedings* (1991) 1–29.
- [181] T. Aoki, T. Kawai, and Y. Takei, “The Bender-Wu Analysis and the Voros Theory II,” *Advanced Studies in Pure Mathematics* **54** (2009) 19–94.
- [182] T. Aoki, T. Kawai, and Y. Takei, “Algebraic analysis of singular perturbations: On exact WKB analysis.” 10, 1993.
- [183] H. Jeffreys, “On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order,” *Proc. London Math. Soc.* **23** no. 1, (1924) 428.
- [184] G. Wentzel, “Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik,” *Z. Phys.* **38** no. 6, (1926) 518–529. CITATION = ZEPYA,38,518;.
- [185] H. Kramers, “Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung,” *Z. Phys.* **39** no. 10, (1926) 828–840.
- [186] L. Brillouin, “La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de resolution par approximations successives,” *Compt. Rend. Hebd. Seances Acad. Sci.* **183** no. 1, (1926) 24–26.
- [187] E. Borel, “Mémoire sur les séries divergentes,” *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure* **3e série**, **16** (1899) 9–131.
<http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.463/>.
- [188] T. Oka and H. Aoki, “Dielectric Breakdown in a Mott Insulator: Many-body Schwinger-Landau-Zener Mechanism studied with a Generalized Bethe Ansatz,” *Phys. Rev. B* **81** (2010) 033103, [arXiv:0903.2707](https://arxiv.org/abs/0903.2707) [cond-mat.stat-mech].

- [189] E. Akkermans and G. V. Dunne, “Ramsey Fringes and Time-domain Multiple-Slit Interference from Vacuum,” [Phys. Rev. Lett.](#) **108** (2012) 030401, [arXiv:1109.3489 \[hep-th\]](#).
- [190] S. A. Fulling, “REMARKS ON POSITIVE FREQUENCY AND HAMILTONIANS IN EXPANDING UNIVERSES,” [Gen. Rel. Grav.](#) **10** (1979) 807–824.
- [191] Y. Yamada, “Superadiabatic basis in cosmological particle production: application to preheating,” [JCAP](#) **09** (2021) 009, [arXiv:2106.06111 \[hep-th\]](#).
- [192] M. Srednicki, [Quantum field theory](#). Cambridge University Press, 1, 2007.
- [193] Y.-Z. Chu and T. Vachaspati, “Capacitor Discharge and Vacuum Resistance in Massless QED₂,” [Phys. Rev. D](#) **81** (2010) 085020, [arXiv:1001.2559 \[hep-th\]](#).
- [194] A. Iwazaki, “Pair Creation in Electric Flux Tube and Chiral Anomaly,” [Phys. Rev. C](#) **80** (2009) 052202, [arXiv:0908.4466 \[hep-ph\]](#).
- [195] A. Iwazaki, “Pair Creation of Massless Fermions in Electric Flux Tube,” [arXiv:0905.2003 \[hep-ph\]](#).
- [196] A. Iwazaki, “Chiral Anomaly and Decay of Color Electric Field,” [arXiv:0904.1449 \[hep-ph\]](#).
- [197] N. Tanji, “Quark pair creation in color electric fields and effects of magnetic fields,” [Annals Phys.](#) **325** (2010) 2018–2040, [arXiv:1002.3143 \[hep-ph\]](#).