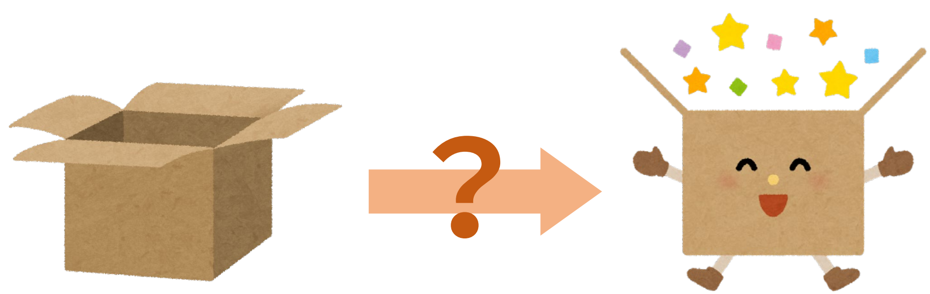
「無」から「有」をつくる

- 素粒子物理学の視点から -



田屋英俊 (理研iTHEMS)

専門: 理論物理学、特に素粒子・原子核物理

目次

1. 素粒子物理とは？
2. 量子論とは？
3. 「無」から「有」をつくる
4. 最近の研究:
   超強力な光(レーザー)を使った実現？

物理学

物理学 = 「モノ(物)」の「ことわり(理)」を理解する学問

- 「モノ」なら何でも良い
- が、大きさによってしばしば細分化されている
- 素粒子物理は、「最も小さいモノ」が主たる研究対象
- どれくらい「小さいモノ」が研究対象？

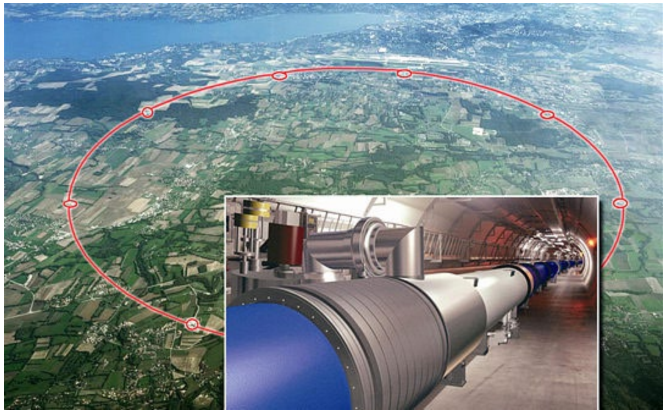
“Powers of ten” by Eames office (1977年)　https://www.youtube.com/watch?v=paCGES4xpro から抜粋

素粒子

- さっきのビデオ(1977年)によれば、10^{-15}m以下のことは「よくわからない」だった

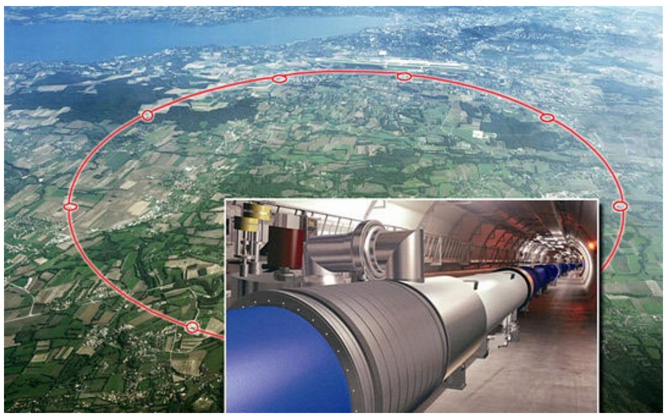
素粒子

- さっきのビデオ(1977年)によれば、10^{-15}m以下のことは「よくわからない」だった
- 20世紀後半から、大規模な加速器実験が行われ、「素粒子」がその答えだとわかった



素粒子

- さっきのビデオ(1977年)によれば、10^{-15}m以下のことは「よくわからない」だった
- 20世紀後半から、大規模な加速器実験が行われ、「素粒子」がその答えだとわかった



≈

ぶつけて壊す

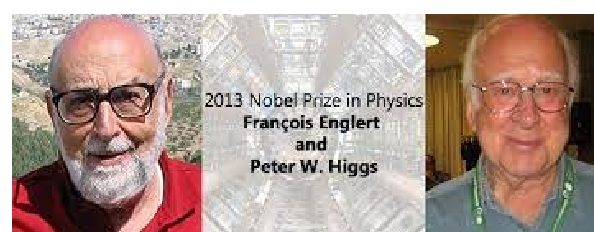
- 壊せば、時計の最小の構成要素である「ネジ」の「種類」や「形」が分かる

素粒子

17種類 (クォーク, 電子, ニュートリノ, ヒッグス粒子, ...)

4つの力 (弱い力, 強い力, 電磁気力, 重力)

- 2012年のヒッグス粒子の発見で素朴に予想されてた「すべて」の素粒子が発見された、と考えられている



素粒子物理 完？

素粒子物理 完？

そんなことはない ⇒ むしろ、スタート地点

ぶつけて壊す

(1) 見落としていたネジがあるかもしれない

➡ 新しい素粒子は本当にないのだろうか？

(2) ネジはさらに分解できるかもしれない

➡ 素粒子よりも基本的な「モノ」は何か？

(3) ネジの種類や形が分かっても、時計がどうやって動くかはとても非自明

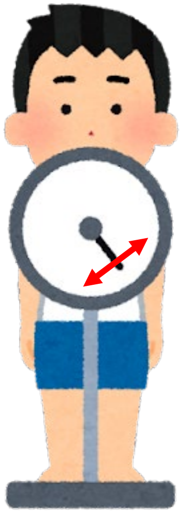
➡ 素粒子の運動(ダイナミクス)から自然を理解する/新しい現象を予言

目次

小さいモノの運動の法則 = 量子論

- スケールが違うとたびたび非直感的なことが起こる

<u>小さいモノの運動の法則 = 量子論</u>



- スケールが違うとたびたび非直感的なことが起こる
- 量子論の帰結: 不確定性関係 $\Delta E\ \Delta t \approx \hbar$ ← すごい小さい数 (プランク定数)

⇒ 小さなスケールでは、エネルギーは「ゆらぐ」

⇒ エネルギーゼロの状態でも (=何もない「無」) 、

「ゆらぎ」で有限のエネルギーが<u>一瞬</u>あるように「見える」 (=素粒子がいる「有」)

「無」≠ 空っぽな空間

「無」≠ 空っぽな空間

- 量子論的には、「無」は「もぐらたたきゲーム」みたいな状態

(動画は3モグラ/秒くらいだが、実際の私たちの「無」は10^{19}粒子/秒くらいでゆらいでいる)

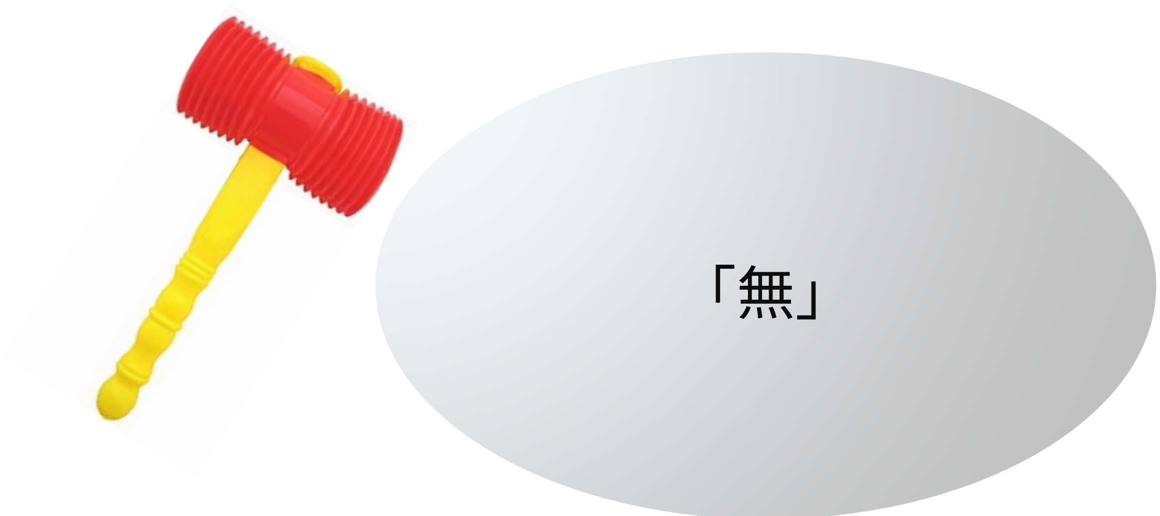
Youtube動画の「スーパーモグラたたきオフィシャル動画」より抜粋
https://www.youtube.com/watch?v=dmQfBmWEO6s

- しかし、一瞬でモグラは帰ってしまう ⇒ 現状では「無」は「無」のまま

目次

1. 素粒子物理とは？
2. 量子論とは？
3. 「無」から「有」をつくる
4. 最近の研究:
超強力な光(レーザー)を使った実現？

「無」を叩くと？



- 「無」=空っぽ、だと力を受け取るモノがないので、何も起きない

「無」を叩くと？

弱い

- 「無」=空っぽ、だと力を受け取るモノがないので、何も起きない

- モグラが逃げる前にモグラを叩ければ、モグラに力を与えることができる

  ⇒ しかし、ピコピコハンマーくらいの「弱い」力だと何も起きない

「無」を叩くと？

強い

- 「無」=空っぽ、だと力を受け取るモノがないので、何も起きない

- モグラが逃げる前にモグラを叩ければ、モグラに力を与えることができる

  ⇒ しかし、ピコピコハンマーくらいの「弱い」力だと何も起きない

- もっと「強い」力でモグラを叩くと、モグラは穴から飛び出て帰れない

  ⇒ 「無」(=モグラがいない状況)から「有」(=モグラがいる状況)がつくれる

素粒子でも同じことが起きる

- 「強い」「力」で「無」(=モグラがいない)を叩くと、「有」(=モグラがいる)が**つくれる**

真空(=素粒子がいない状態)

素粒子がいる状態

素粒子でも同じことが起きる

- 「強い」「力」で「無」(=モグラがいない)を叩くと、「有」(=モグラがいる)が**つくれる**

真空(=素粒子がいない状態)

素粒子がいる状態

疑問(1): どんな「力」でも良いの?

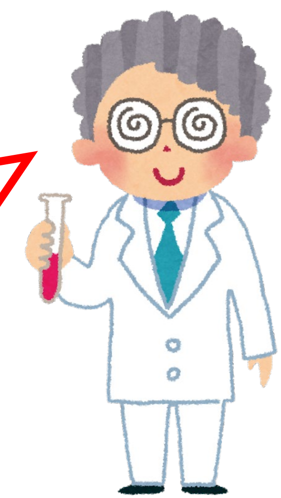
素粒子でも同じことが起きる

- 「強い」「力」で「無」(=モグラがいない)を叩くと、「有」(=モグラがいる)が**つくれる**

↘ 真空(=素粒子がいない状態)

↘ 素粒子がいる状態

疑問(1): どんな「力」でも良いの?



答え: Yes。「強け」れば、基本的にはどんな力でも良い。

例1) 超強い光

Schwinger効果

例2) 超早い振動

動的Casimir効果

例3) 超強い重力場

Hawking放射

<u>素粒子でも同じことが起きる</u>

- 「強い」「力」で「無」(=モグラがいない)を叩くと、「有」(=モグラがいる)が**<u>つくれる</u>**

真空(=素粒子がいない状態)

素粒子がいる状態

疑問(2): どれくらいの「強さ」が必要?

素粒子でも同じことが起きる

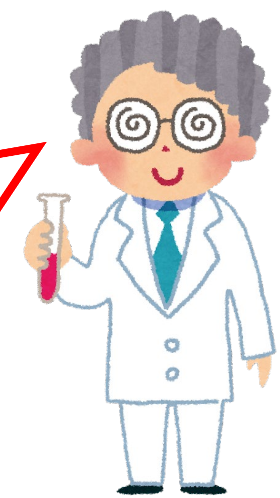
- 「強い」「力」で「無」(=モグラがいない)を叩くと、「有」(=モグラがいる)が**つくれる**

真空(=素粒子がいない状態)

素粒子がいる状態

疑問(2): どれくらいの「強さ」が必要？

答え: めちゃくちゃ強い。光を例にすると、10^{28} W/cm^{2}くらい必要



LED

$\fallingdotseq 10^{-5}$ W/cm^{2}

虫眼鏡

$\fallingdotseq 10^{3}$ W/cm^{2}

レーザー加工機
(鉄も加工できる)

$< 10^{10}$ W/cm^{2}

素粒子でも同じことが起きる

- 「強い」「力」で「無」(=モグラがいない)を叩くと、「有」(=モグラがいる)が**つくれる**

→ 真空(=素粒子がいない状態)

→ 素粒子がいる状態

疑問(3): そんなに「強い」力は実現できるの?

素粒子でも同じことが起きる

- 「強い」「力」で「無」(=モグラがいない)を叩くと、「有」(=モグラがいる)が**つくれる**

真空(=素粒子がいない状態)

素粒子がいる状態

疑問(3): そんなに「強い」力は実現できるの?

答え: 宇宙の激烈な状況などで実現されているかもしれない

例) ブラックホール、初期宇宙、中性子星

人間が実験室で作ることは無理だった

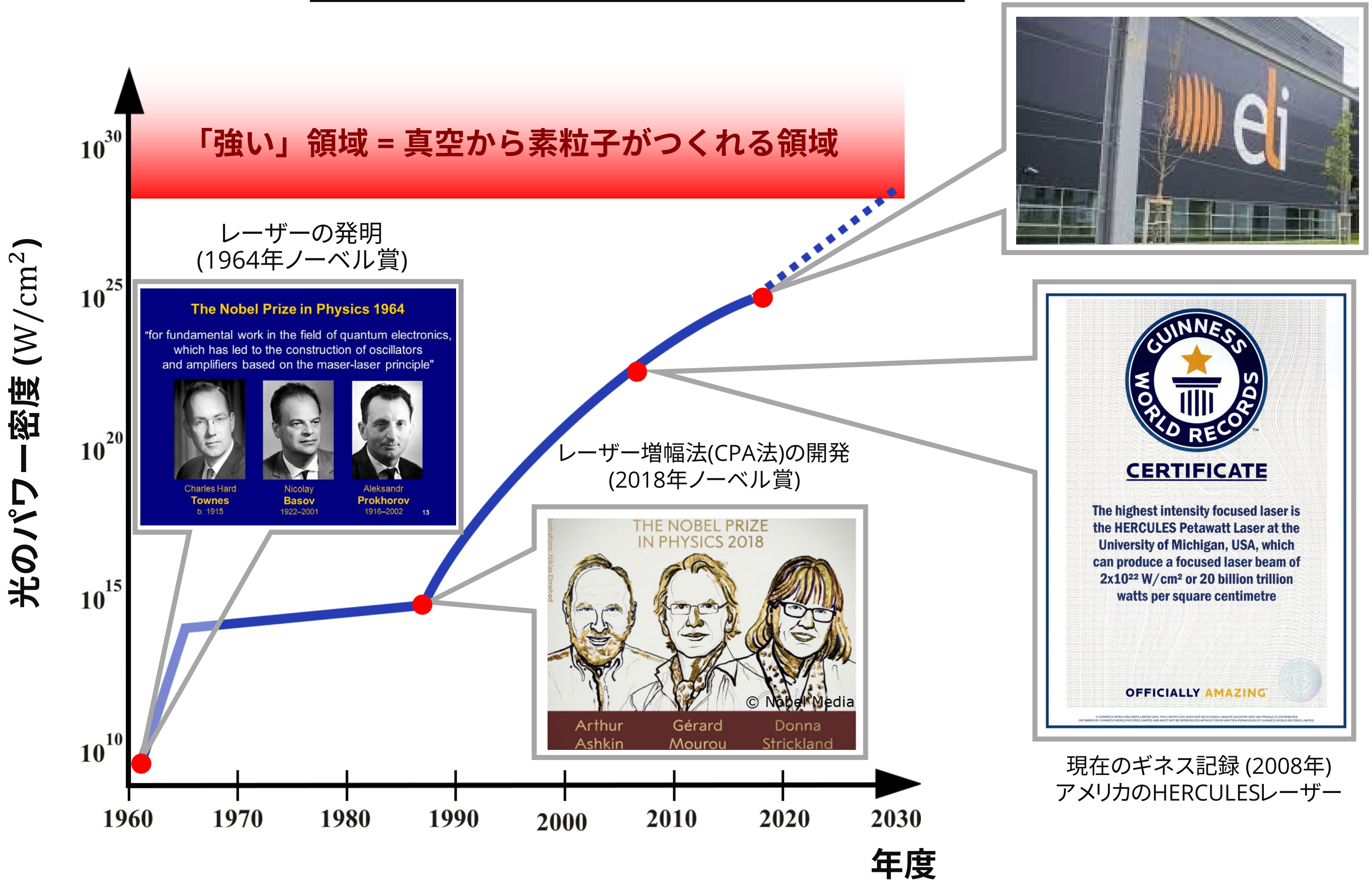
が、最近実現できるようになりつつある!

目次

1. 素粒子物理とは？
2. 量子論とは？
3. 「無」から「有」をつくる
4. 最近の研究:
   超強力な光(レーザー)を使った実現？

レーザーの発展

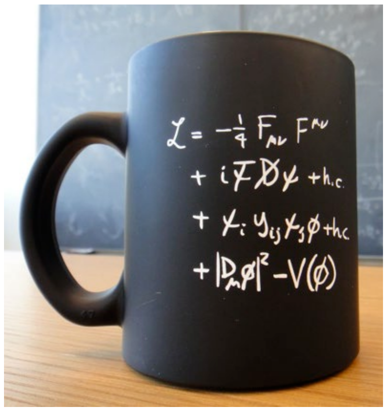
ヨーロッパで稼働を始めた
最強レーザーELI



- 参考: LED ~ 10^{-5} W/cm^2、虫眼鏡 ~ 10^3 W/cm^2、レーザー加工機 $\lesssim 10^{10}$ W/cm^2
- 宇宙の極限状況に匹敵するくらい「強い」光を人工的に作れるようになってきた!

強い光を使った「無」の理論研究

- 加速器実験などから得られた素粒子物理学の知見を使って暴く



$\Rightarrow$

微分方程式の解析

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = H\psi$$

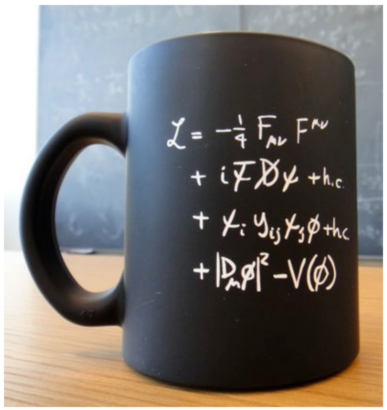
例) 電子なら、Hは4x4行列 (Dirac方程式)

- さまざまな物理過程が起こることが理論的にわかってきた

レビュー [Fedotov, Ilderton, Karbstein, King, Sept, HT, Torgrimsson, arXiv:2203.00019 (to appear on Phys. Rept.)]

強い光を使った「無」の理論研究

- 加速器実験などから得られた素粒子物理学の知見を使って暴く



$\Rightarrow$

微分方程式の解析

$$i\partial_t \psi = H\psi$$

例) 電子なら、Hは4x4行列 (Dirac方程式)

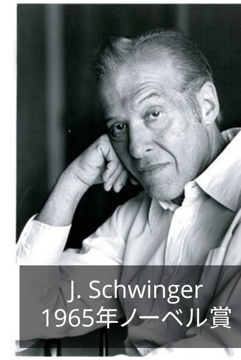
- さまざまな物理過程が起こることが理論的にわかってきた

レビュー [Fedotov, Ilderton, Karbstein, King, Sept, HT, Torgrimsson, arXiv:2203.00019 (to appear on Phys. Rept.)]

- 一例とし、Schwinger機構 = 強い光を使って「無」から「有」を作る物理機構、の研究を紹介

Schwinger機構とSchwingerの公式

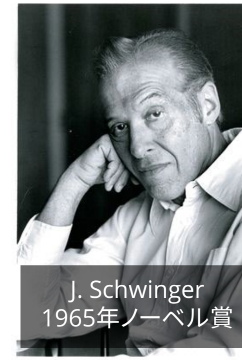
強い光を真空に当てると、電子(と陽電子のペア)が生まれる現象のこと



J. Schwinger
1965年ノーベル賞

Schwinger機構とSchwingerの公式

強い光を真空に当てると、電子(と陽電子のペア)が生まれる現象のこと



J. Schwinger
1965年ノーベル賞

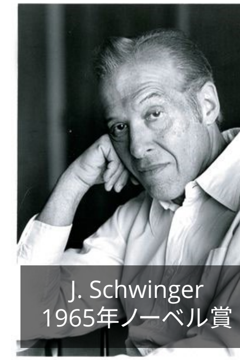
- 強い光が定常的なときは、Schwinger機構の性質はよくわかっている
  (定常な電場E)

$$N(t=\infty) \propto \exp\left[-\#\frac{m^2}{eE}\right] = \exp\left[-\#\frac{(\text{電子の質量})^2}{(\text{電場の強さ})}\right]$$

[Schwinger (1951)]
[Nikishov (1969)]

Schwinger機構とSchwingerの公式

強い光を真空に当てると、電子(と陽電子のペア)が生まれる現象のこと



- 強い光が定常的なときは、Schwinger機構の性質はよくわかっている

(定常な電場E)

$$N(t=\infty) \propto \exp\left[-\#\frac{m^2}{eE}\right] = \exp\left[-\#\frac{(\text{電子の質量})^2}{(\text{電場の強さ})}\right]$$

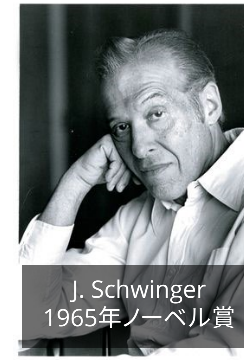
[Schwinger (1951)]
[Nikishov (1969)]

- 直感的な理解: (1) Diracの海 ≒ 見えないところにモグラがたくさん潜んでいる

(2) 量子トンネル効果 ≒ 普通は通れないところを通り抜けてしまう量子的な効果

Schwinger機構とSchwingerの公式

強い光を真空に当てると、電子(と陽電子のペア)が生まれる現象のこと


J. Schwinger
1965年ノーベル賞

- 強い光が定常的なときは、Schwinger機構の性質はよくわかっている
  (定常な電場E)

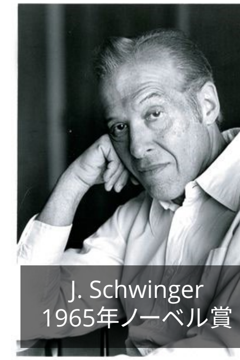
$$N(t=\infty) \propto \exp\left[-\#\frac{m^2}{eE}\right] = \exp\left[-\#\frac{(\text{電子の質量})^2}{(\text{電場の強さ})}\right]$$

[Schwinger (1951)]
[Nikishov (1969)]

- 直感的な理解: (1) Diracの海 ≒ 見えないところにモグラがたくさん潜んでいる
  (2) 量子トンネル効果 ≒ 普通は通れないところを通り抜けてしまう量子的な効果

Schwinger機構とSchwingerの公式

強い光を真空に当てると、電子(と陽電子のペア)が生まれる現象のこと


J. Schwinger
1965年ノーベル賞

- 強い光が定常的なときは、Schwinger機構の性質はよくわかっている
  (定常な電場E)

$$N(t=\infty) \propto \exp\left[-\#\frac{m^2}{eE}\right] = \exp\left[-\#\frac{(\text{電子の質量})^2}{(\text{電場の強さ})}\right]$$

[Schwinger (1951)]
[Nikishov (1969)]

- 直感的な理解: (1) Diracの海 ≒ 見えないところにモグラがたくさん潜んでいる
  (2) 量子トンネル効果 ≒ 普通は通れないところを通り抜けてしまう量子的な効果

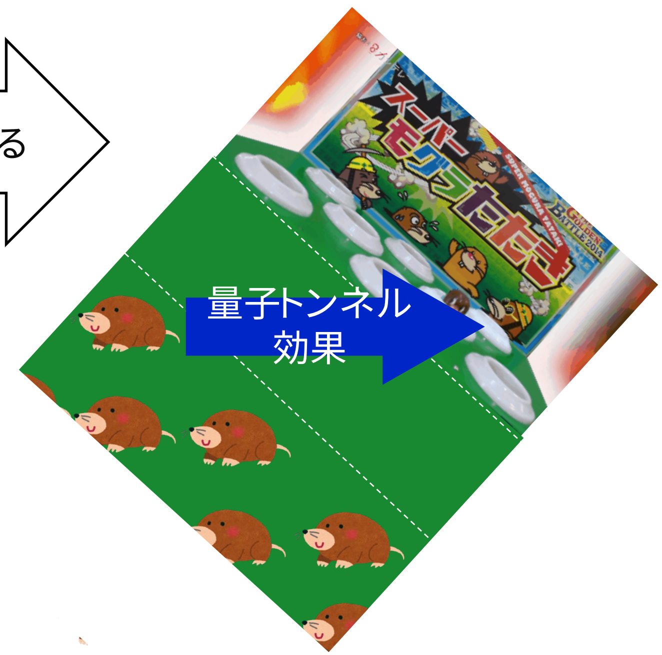
物理的に観測できる領域

ギャップ = 電子質量 $2m$

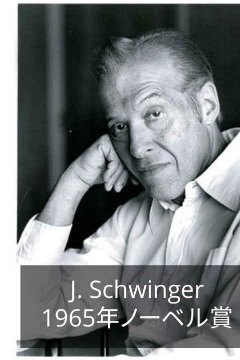
Diracの海

電場 ($V = -eEx$) をかける

≈ もぐらたたきを傾ける



Schwinger機構とSchwingerの公式



強い光を真空に当てると、電子(と陽電子のペア)が生まれる現象のこと

- 強い光が定常的なときは、Schwinger機構の性質はよくわかっている
  (定常な電場E)

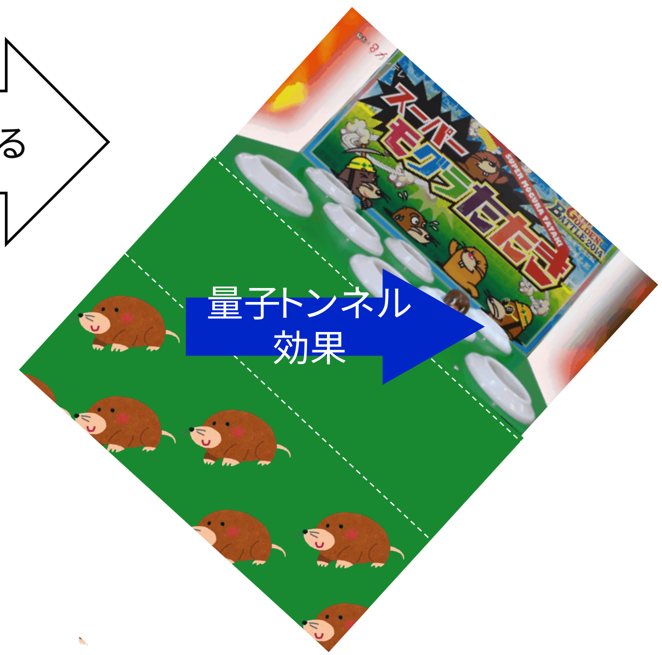
$$N(t=\infty) \propto \exp\left[-\#\frac{m^2}{eE}\right] = \exp\left[-\#\frac{(\text{電子の質量})^2}{(\text{電場の強さ})}\right]$$

[Schwinger (1951)]
[Nikishov (1969)]

- 直感的な理解: (1) Diracの海 ≒ 見えないところにモグラがたくさん潜んでいる
  (2) 量子トンネル効果 ≒ 普通は通れないところを通り抜けてしまう量子的な効果

電場 ($V = -eEx$) をかける

≈ もぐらたたきを傾ける



⇒ もぐらが距離$\Delta\ell$進む確率 ~ $1 - \# \times$ (ギャップの高さ) $\times \Delta\ell$

$2m$ $2m/eE$

⇒ 生成粒子数 $\propto \left(1 - \# \times (\text{高さ}) \times \Delta\ell\right)^{\frac{(\text{長さ})}{\Delta\ell}} \xrightarrow{\Delta\ell \to 0} \exp[-\# \times (\text{高さ}) \times (\text{長さ})]$

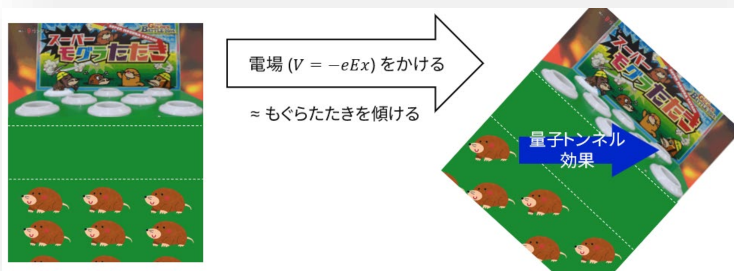
時間電場の下でのSchwinger機構

- 電場が「定常」というのは理想的過ぎる

時間電場の下でのSchwinger機構

- 電場が「定常」というのは理想的過ぎる

- 電場が「時間依存」すると、容易にSchwinger公式の物理的描像は破綻する



➡ 量子トンネルが完了する前に
電場がなくなると粒子生成は不可能

トンネル時間: $t_{\text{tunnel}} \propto$ (ギャップの長さ) $\propto m/eE$

電場の寿命: $t_{\text{field}} \propto$ (電場の典型的な周波数)$^{-1} \propto 1/\omega$

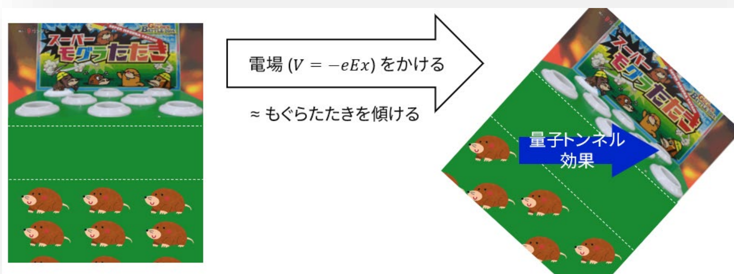
$\Rightarrow 1 > \dfrac{t_{\text{tunnel}}}{t_{\text{field}}} = \dfrac{m\omega}{eE}$ (Keldyshパラメーター)

[Keldysh (1965)]
[Brezin, Itzykson (1970)]
[Popov (1971)]

時間電場の下でのSchwinger機構

- 電場が「定常」というのは理想的過ぎる

- 電場が「時間依存」すると、容易にSchwinger公式の物理的描像は破綻する



➡ 量子トンネルが完了する前に
電場がなくなると粒子生成は不可能

トンネル時間: $t_{\mathrm{tunnel}} \propto$ (ギャップの長さ) $\propto m/eE$

電場の寿命: $t_{\mathrm{field}} \propto$ (電場の典型的な周波数)$^{-1} \propto 1/\omega$

$\Rightarrow 1 > \frac{t_{\mathrm{tunnel}}}{t_{\mathrm{field}}} = \frac{m\omega}{eE}$ (Keldyshパラメーター)

[Keldysh (1965)]
[Brezin, Itzykson (1970)]
[Popov (1971)]

- 最近の1つの発展: 時間依存電場でのSchwinger機構の理解

(1) 電場が時間依存するとSchwinger機構は強く促進される

(2) 時間依存性を応用すると、真空からいろんなものを作れる (スピン流、高次高調波、…)

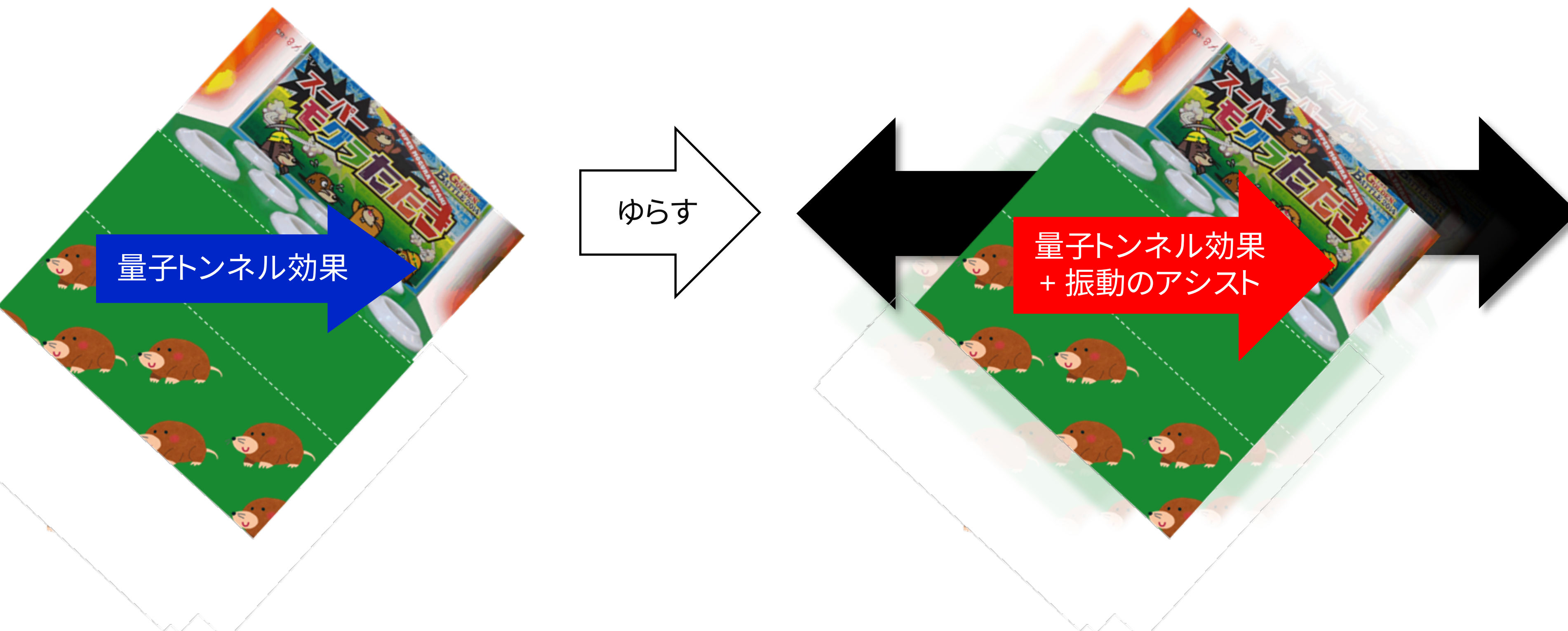
(1) Schwinger機構の促進

- Dynamically assisted Schwinger 機構 [Schutzhold, Gies, Dunne (2008)] [HT (2019)]

➡ 遅い電場に速い電場を加えると、Schwinger機構が強く促進される

大雑把な理解:

速い電場 = 周波数が大きい電場を加える ≈ もぐらたたきを激しくゆらす



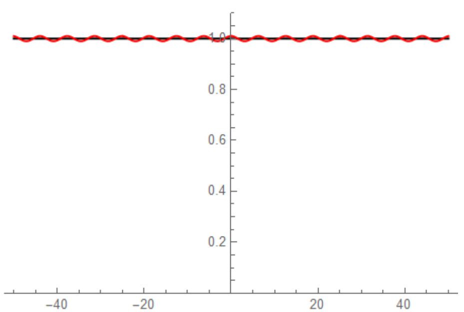
(1) Schwinger機構の促進

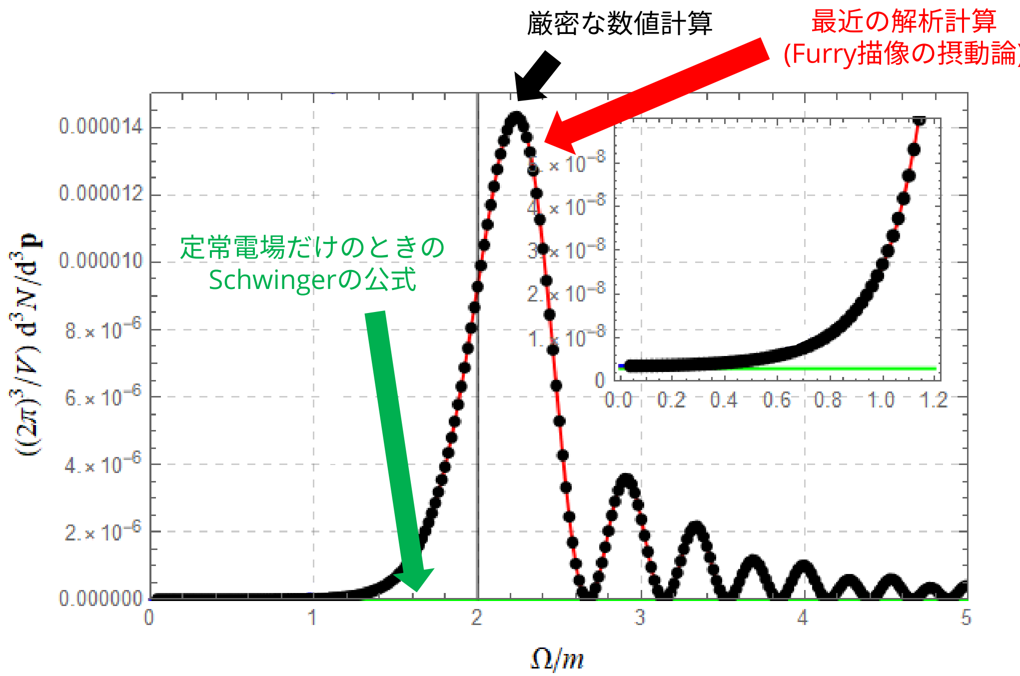
- Dynamically assisted Schwinger 機構 [Schutzhold, Gies, Dunne (2008)] [HT (2019)]

➡ 遅い電場に速い電場を加えると、Schwinger機構が強く促進される

電場の配位

$$E = E_0\left(1 + \frac{1}{100}\cos\Omega t\right)$$





- 電場をうまくデザインすると、真に強いレーザーなしでも真空から粒子を作れるかも

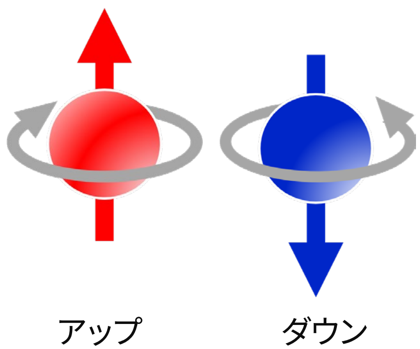
➡ 最新の設備(例: ELI)を使った検証への期待

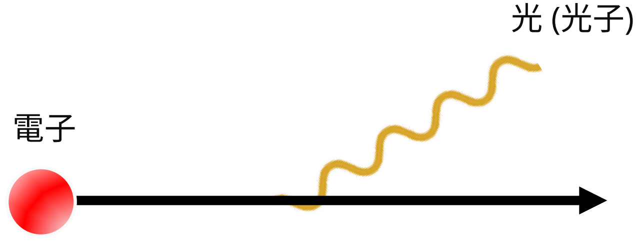
(2) Schwinger機構の応用

- 素粒子はいろんな性質を持つ

例) もぐら: 性別の自由度(オス/メス)、子を産んで増える、・・・

電子: スピン自由度(アップ/ダウン)、光を吐き出す、・・・





- 電磁場をデザインすることで、特定の性質をより強く反映した粒子生成を起こせる

➡ もしかしてもしかすると、「真空 = 『無』」を使った応用科学・工学が可能かも (?)

(2) Schwinger機構の応用

例1) 真空のスピントロニクス

- スピントロニクス ➡ スピンやスピンの流れを生成・制御することで、電気的なエレクトニクスだけでは実現が難しい強力なデバイスが作れる (例: ハードディスク)
- 21世紀に発展。いろんな「物質」を使ったスピンデバイスがつくられた

半導体, 金属, 磁性体, ...

(2) Schwinger機構の応用

例1) 真空のスピントロニクス

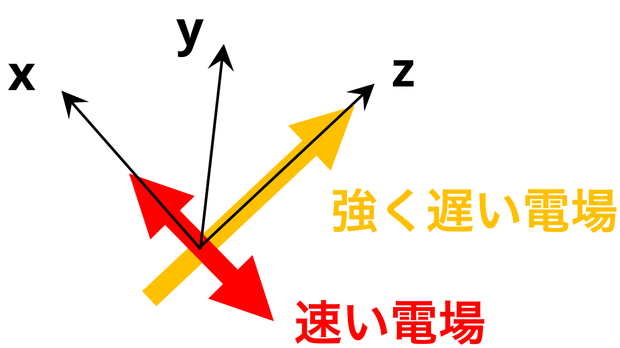
- スピントロニクス ➡ スピンやスピンの流れを生成・制御することで、電気的な エレクトロニクスだけでは実現が難しい強力なデバイスが作れる (例: ハードディスク)
- 21世紀に発展。いろんな「物質」を使ったスピンデバイスがつくられた

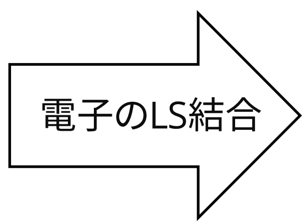
半導体, 金属, 磁性体, ...

- Schwinger機構の応用で、「真空」=「物質がない『無』」からもスピン・スピン流が作れる

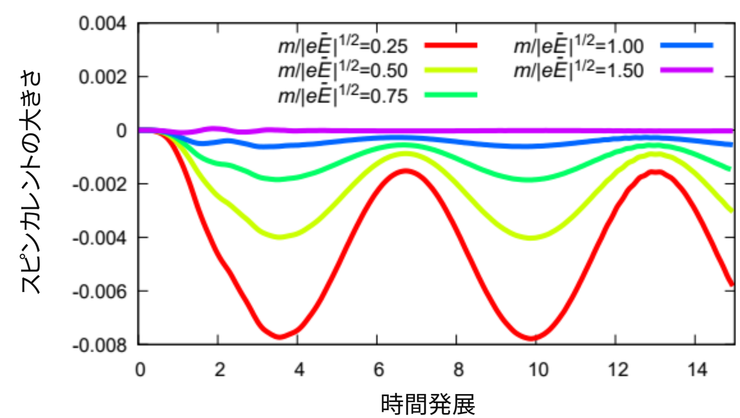
➡ スピンを偏極させる電磁場の配位を与えれば良い (例: 磁場、偏光電場、・・・)

[Huang, HT (2019)] [Huang, Matsuo, HT (2019)]





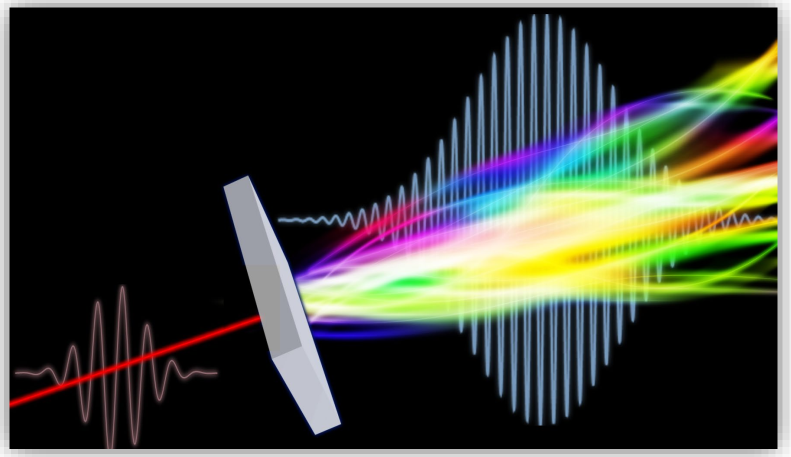
≈ スピンは、
速度 x 電場
の方向に揃う



➡ もしかしてもしかすると「真空」がスピントロニクスデバイスとして使えるかも (?)

(2) Schwinger機構の応用

例2) 高次高調波発生



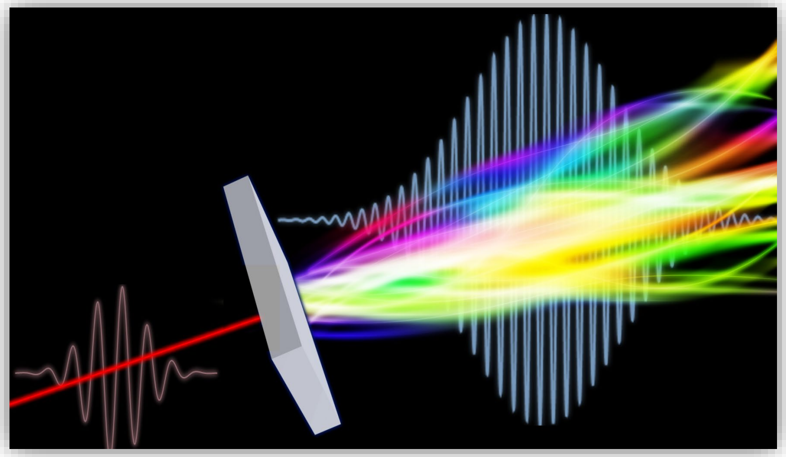
cf. RIKEN research highlight

- 高次高調波発生 ➡ 光を「物質」に打ち込むと、より高周波の光が出てくる現象

応用例) アト秒光源のような超高速光源

(2) Schwinger機構の応用

例2) 高次高調波発生

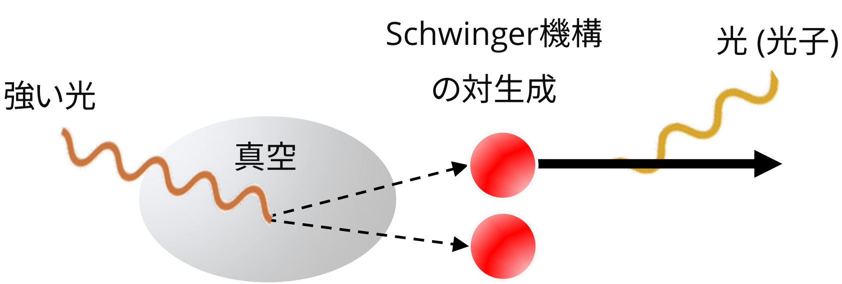


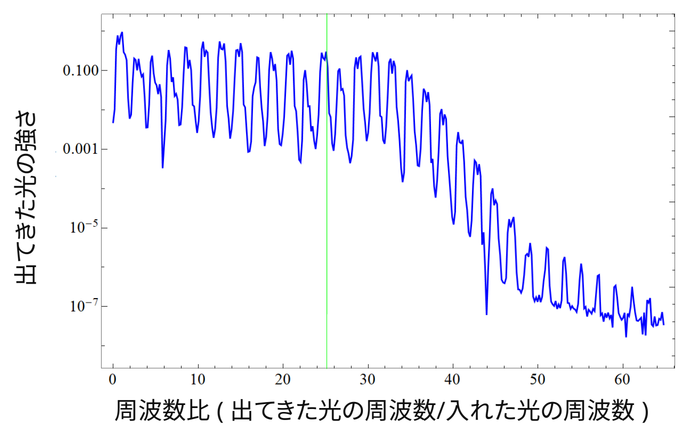
cf. RIKEN research highlight

- 高次高調波発生 ➡ 光を「物質」に打ち込むと、より高周波の光が出てくる現象

  応用例) アト秒光源のような超高速光源

- 実は「真空」に打ち込むだけでも起こる





[HT, Hongo, Ikeda (2021)]

➡ もしかしてもしかしたら「真空」が超高速光源になるかも (?)

目次

1. 素粒子物理とは？
2. 量子論とは？
3. 「無」から「有」をつくる
4. 最近の研究:
   超強力な光(レーザー)を使った実現？

まとめ

- ✔ **素粒子物理学は「最も小さいモノ」である素粒子を研究する分野で、20世紀後半に大きく進展した**
- ✔ **小さいモノを支配する法則である量子論によれば、「無」は、辞書的な意味の無(=空っぽの空間)ではなく、豊かな物理が広がっている**

例)「無」から「有」は<u>つくれる</u>

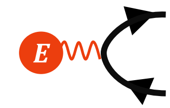
- ✔ **最強のレーザーを使った実験が最近ついに始まった**
  - 「無」の不思議な物理がこれからたくさん暴かれるだろう
    それは素粒子物理だけでなく、スケールを超え、極限宇宙の理解などにも役立つ
  - Schwinger機構の最近の理論研究の紹介
    (時間依存性による促進や、真空のスピントロニクスや高次高調波発生といった応用)

補足

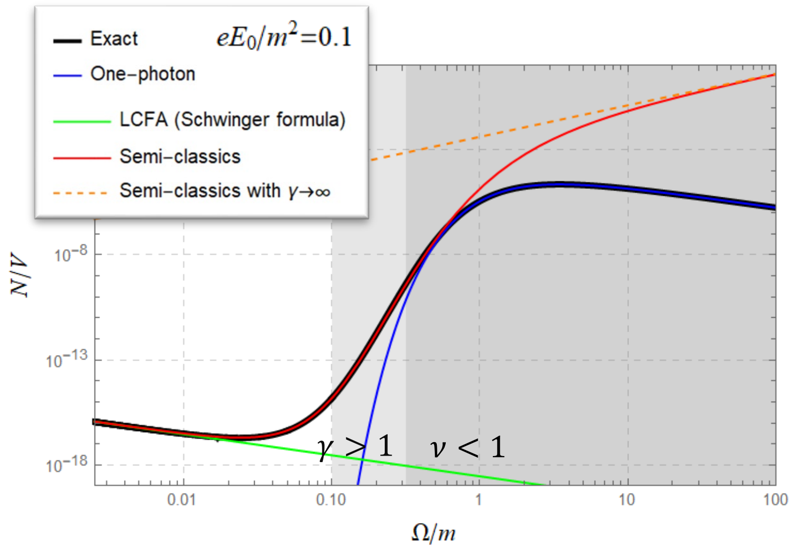
1光子過程の重要性

[HT, Fujii, Itakura (2014)]
[HT, Fujimori, Misumi, Nitta, Sakai (2020)]

✔ 答え: 1光子過程が思ったよりも早く支配的になる



✔ Sauterパルス電場の場合の比較: $eE(t) = \dfrac{eE_0}{\cosh^2(\Omega t)}$



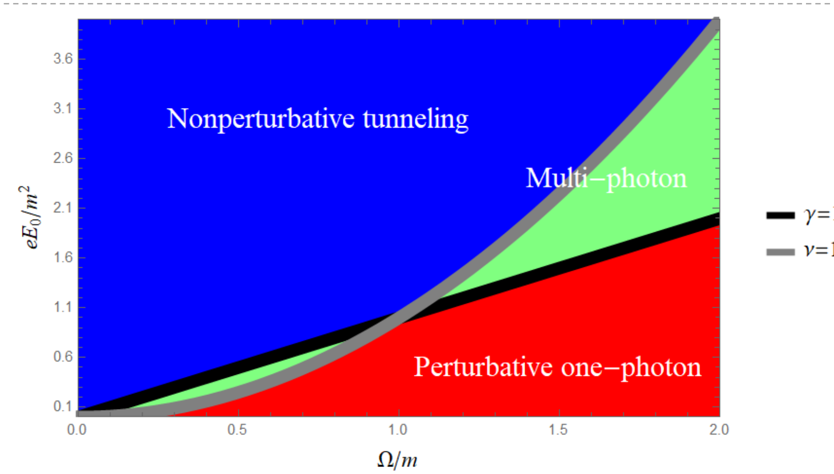
- $\gamma \gg 1$ では実際には1光子過程が効いている
  ⇒ n光子過程が効いているのは中間領域
- 1光子過程が支配する領域で粒子生成が最大化
  ⇒ 時間依存電場の方が多くの粒子を作れる
  ⇒ レーザーをデザインしたりするときに使える
  (次のdynamically assisted Schwinger mech. の話)

✔ Schwinger機構の"相図"

- 2つの無次元パラメーター: $\gamma = \dfrac{m\Omega}{eE_0}$, $\nu \equiv \dfrac{eE_0}{\Omega^2}$
  が粒子生成が非摂動/摂動的かを判別する

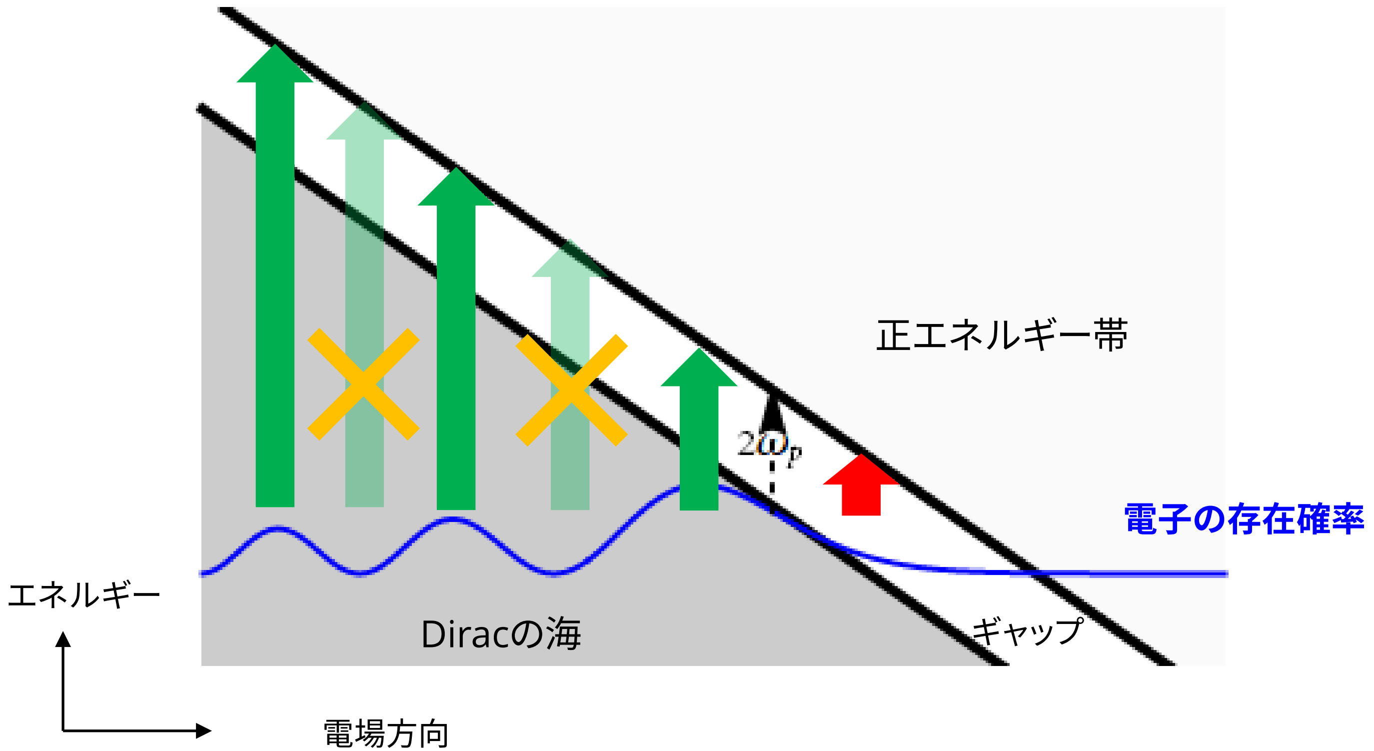
$\gamma \gg 1,\ \nu \ll 1 \Rightarrow$ 摂動的な1光子過程

$\gamma \ll 1,\ \nu \gg 1 \Rightarrow$ 非摂動的なトンネリング

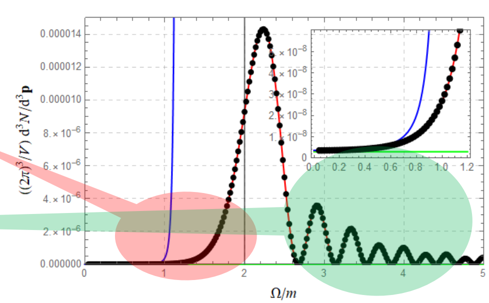


[HT, (2019)]

バンド描像による理解



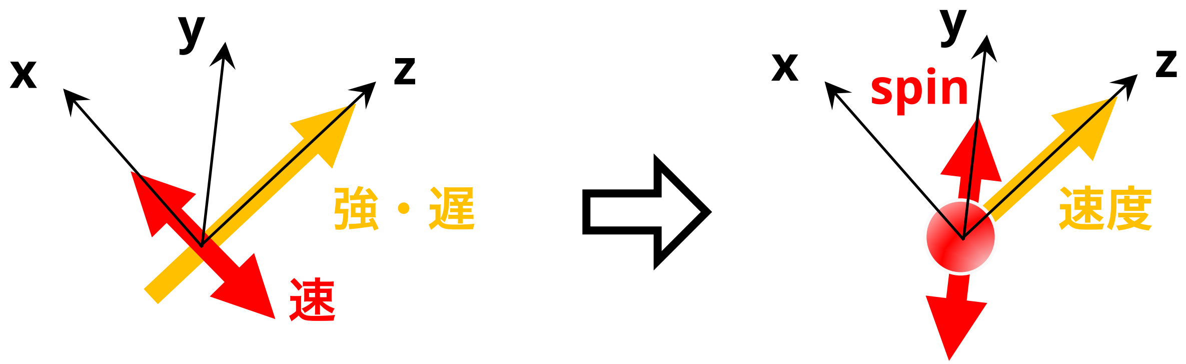
- **量子トンネリング ⇒ 粒子生成の増大**
- **量子反射 ⇒ 粒子生成の振動**



Dynamically assisted Schwinger mechanismでの粒子生成スペクトルは、
強い電場中のQED真空(Diracの海)の構造を反映する

強く遅い電場に速い電場を直交させる

[Huang, Matsuo, HT, (2019)]



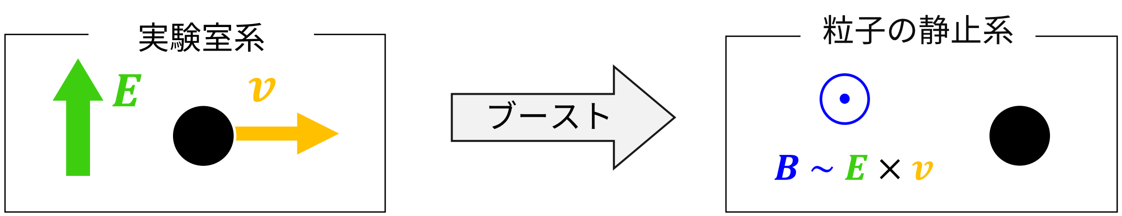
(1) 電子・陽電子が電場により作られ、電場の方向に電流を流そうとする

(2) 電流は、速い電場の変化に追随しようとするが、タイムラグがある

⇒ **電流と電場は厳密に平行になれない** $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{0}$

(3) Dirac粒子は、$\boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{E})$**の形のスピン軌道相互作用を必ず持つ**

- Dirac方程式の非相対論近似で導出可 [Foldy, Wouthuysen (1950)] [Tani (1951)]
- 電場の中で運動をしている電子の静止系では、電場は磁場に見える



⇒ ゼーマン効果でスピン偏極

$$\Delta E \sim \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E})$$

背後の物理: 粒子生成の量子干渉

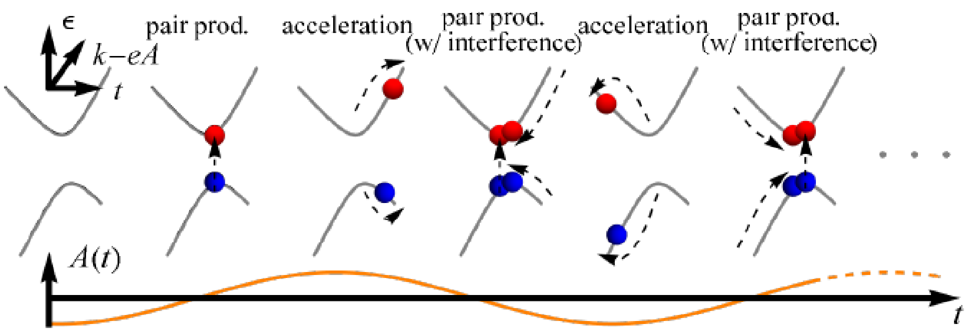
[Corkum (1993)]
[Lewenstein et al., (1994)]
[Vampa et al., (2014), (2015)]

✔ 基本的には3ステップモデル的な描像でHHGが起きる

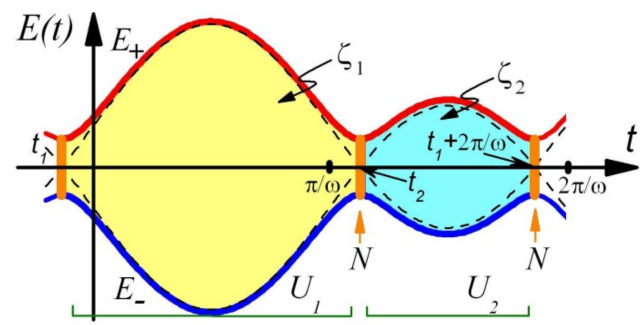
粒子生成 (Schwinger機構) ⇒ 電場による加速 ⇒ 加速で得たエネルギーを高次高調波として放出

⇒ スペクトルの強度の全体の大きさは粒子生成数で決まる

⇒ 粒子生成が非摂動的だと$N \propto \mathrm{e}^{-\#\frac{m^2}{eE}}$でサチる。摂動的だと冪的に落ちる。



[Shevchenko, Ashhab, Nori (2010)]より



✔ 何回も粒子生成が起きると、異なる粒子生成間で位相干渉が起こる

⇒ Stuckelberg phase effect: $P \sim \left| \#\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, E_+(t)\right] + \#\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, E_-(t)\right]\right|$

[Stuckelberg (1933)]

$$\sim \sin\left[-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,(E_+(t) - E_-(t))\right]$$

$$= \sin[(eE_0, \Omega \text{ の関数})]$$

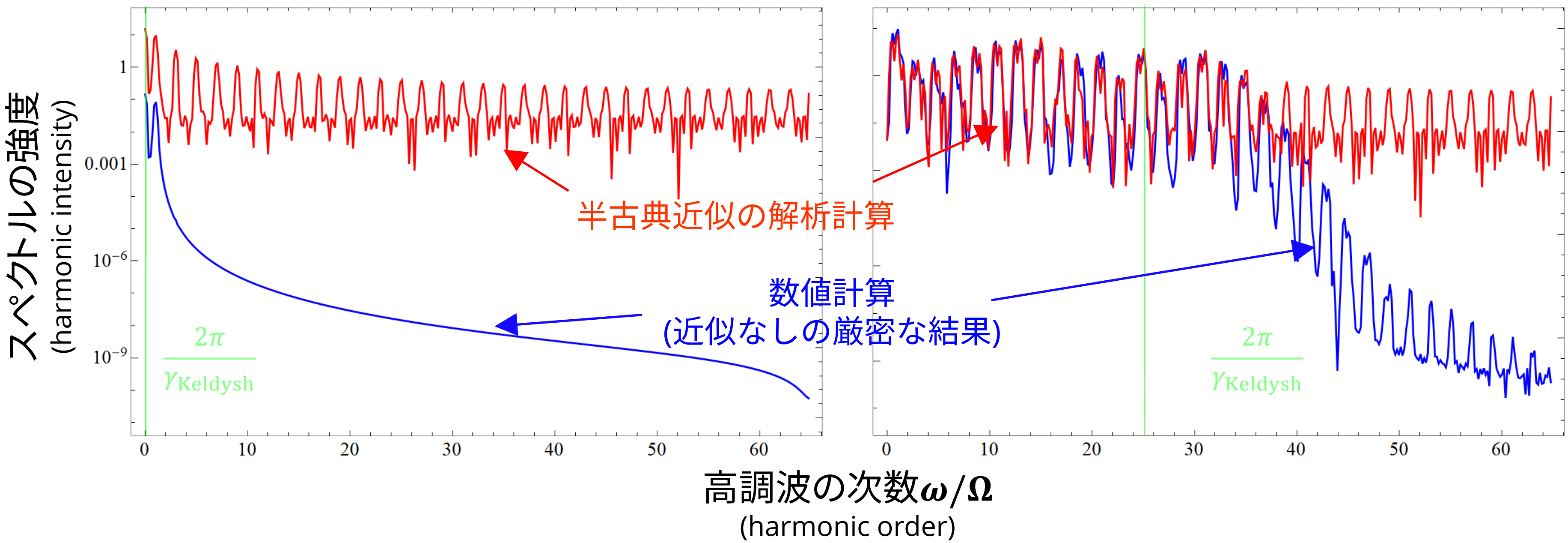
⇒ E_0, Ω を動かすとき、干渉がdestructive/constructiveに働くと、スペクトル強度が下/上がる

高調波スペクトル

✔ <u>たしかに出る</u>。コサイン電場 $E(t) = E_0\cos(\Omega t)$を当てた場合が以下

弱く速い $\gamma_{\mathrm{Keldysh}} \coloneqq \frac{m\Omega}{eE_0} = 100$

遅く強い $\gamma_{\mathrm{Keldysh}} = 1/4$



- 半導体HHGと同じような振る舞い:

  ⇒ 奇数次の高次高調波 $n = 1,3,5,\ldots$ & プラトー構造

- 完全に解析的な計算は厳しいが、半古典近似は非摂動的な領域で良い

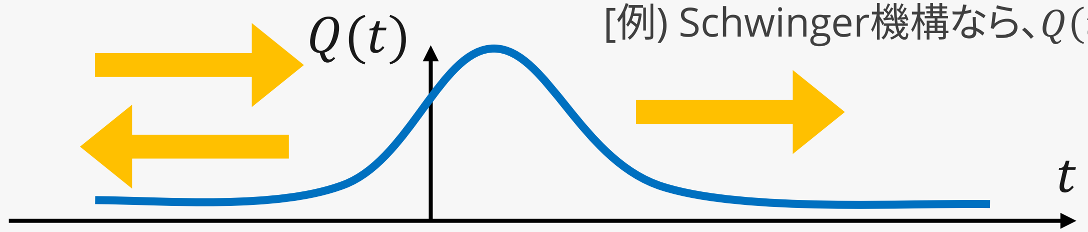
粒子生成の理論

[Birrel, Davies, "Quantum Fields in Curved Space," Cambridge (1984)]

生成消滅演算子のBogoliubov変換 = 場の方程式のStokes現象

- 複素スカラー場を外場にさらした状況: $0 = [\hbar^2 \partial_t^2 + Q(t)]\hat{\phi}$

[例) Schwinger機構なら、$Q(t) = m^2 + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(t))^2$]



- $Q(t)$が時間依存だと、正負のエネルギー固有状態(時間並進$-\mathrm{i}\partial_t$の固有状態)は存在しない
  ⇒ 漸近状態$Q(t) \to \mathrm{const.}$でのみ、平面波で粒子をwell-definedに定義可能

$$\hat{\phi}(t \to -\infty) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{a}_{\mathrm{in}} + \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{in}} \quad , \quad \hat{\phi}(t \to +\infty) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{a}_{\mathrm{out}} + \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{out}}$$

- 始/終状態の粒子の生成消滅演算子は一致しない$\hat{a}_{\mathrm{in}} \neq \hat{a}_{\mathrm{out}}$。なぜなら、ある漸近状態の正負の平面波は反対の漸近状態で混合う (場の方程式の漸近解のStokes現象)

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\hat{a}_{\mathrm{in}} + \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{in}} \xrightarrow{t\to+\infty} (\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \beta \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t})\hat{a}_{\mathrm{in}} + (\beta^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \alpha^* \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t})\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{in}}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\underbrace{(\alpha\hat{a}_{\mathrm{in}} + \beta^*\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{in}})}_{=\hat{a}_{\mathrm{out}}} + \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\underbrace{(\beta\hat{a}_{\mathrm{in}} + \alpha^*\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{in}})}_{=\hat{b}^{\dagger}_{\mathrm{out}}}$$

- 粒子数演算子の真空期待値は終状態で非ゼロ $< \mathrm{vac;in}|\hat{a}^{\dagger}_{\mathrm{out}}\hat{a}_{\mathrm{out}}|\mathrm{vac;in} >= |\beta|^2\delta^3(\mathbf{0})$
  ⇒ 粒子生成! Bogoliubov係数βが分かれば良い

完全WKB法

[Voros (1983)] [Pham, Aoki, Koike, Takei, ...] [日本語のRef.: 河合, 竹井,『特異摂動の代数幾何学』, 岩波書店]

完全WKB法 = ”普通”のWKB法 + Borel総和法

(線形常)微分方程式を断熱展開 ($\hbar \to 0$)して摂動的に解く方法

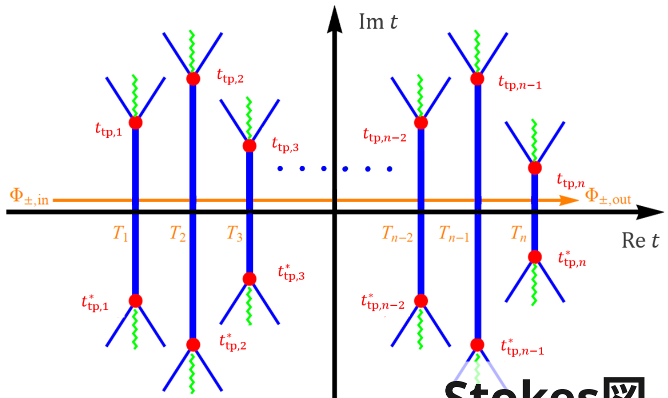
階乗n!程度に発散する形式的な摂動級数からwell-definedな関数を得る総和法

- 普通のWKB法を数学的にwell-definedにする, i.e., ”完全”にする
- 微分方程式のStokes現象を理解する強力な道具
- 物理への応用が最近ちらほら

量子化条件: [Kashani-Poor (2016)]
[Sueishi, Kamata, Misumi, Unsal (2020~)]
[Imaizumi (2020~)] [Ito et al. (2021~)]

粒子生成: [Enomoto, Matsuda (2020~)]

生成粒子数の公式



Stokes図

$$T_{\mathrm{segment},t_{\mathrm{tp}}} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\sigma_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar}\mathrm{e}^{-S_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar} \\ +\mathrm{i}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\sigma_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar}\mathrm{e}^{-S_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar} & 1 \end{pmatrix} + O(\mathrm{e}^{-2S_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar}) = I_2 + \delta T_{\mathrm{segment},t_{\mathrm{tp}}}$$

接続行列

$$\begin{pmatrix} \Phi_+^{\mathrm{out}} \\ \Phi_-^{\mathrm{out}} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} T_{\mathrm{segment},t_{\mathrm{tp},i}} \begin{pmatrix} \Phi_+^{\mathrm{in}} \\ \Phi_-^{\mathrm{in}} \end{pmatrix} = \left(I_2 + \sum_{i=1}^{n} \delta T_{\mathrm{segment},t_{\mathrm{tp},i}} + O(\mathrm{e}^{-2S_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar}) \right) \begin{pmatrix} \Phi_+^{\mathrm{in}} \\ \Phi_-^{\mathrm{in}} \end{pmatrix}$$

⇒ Bogoliubov係数は、$\beta = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{i}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\sigma_{t_{\mathrm{tp},i}}/\hbar}\mathrm{e}^{-S_{t_{\mathrm{tp},i}}/\hbar} + O(\mathrm{e}^{-2S_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar})$

完全WKB法による生成粒子数公式

$$n = |\beta|^2 = \left| \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\sigma_{t_{\mathrm{tp},i}}/\hbar}\mathrm{e}^{-S_{t_{\mathrm{tp},i}}/\hbar} \right|^2 + O(\mathrm{e}^{-3S_{t_{\mathrm{tp}}}/\hbar})$$

<u>コメント1</u>: 半古典近似$\hbar \ll 1$がOKな領域(=外場が十分に遅い)で正しい

<u>コメント2</u>: 他の半古典的手法 (worldline instanton法やDDP公式) と等価

Stokes現象を含む波動関数が求まることは(完全)WKB法のメリット ⇒ 例: 高次高調波への応用